

האינטגרל
דוגמת פתרון מפורט

תרגיל 2.9 נתון שערך האינטגרל המסוים $\int_3^b (6x^3 - 3x) dx$

שווה ל- 34 . מצא את גבול העליון b של האינטגרציה ($b > 3$).

עזרה ורשימת השלבים/הפעולות

תאור כללי

שלבים/פעולות

האינטגרציה

כתיבת המשוואה עבור b

החלפת המשתנה

מציאת שורשי המשוואה

חישוב ה- b

נשתמש באינטגרל מיידי של החזקה, נציב את גבולות האינטגרציה נפתח את הסוגריים ונקבל את המשוואה המיוחדת עבור b . ע"י הצבה מתאימה של משתנה חדש y במשוואה זו נוכל לשנותה למשוואה ריבועית. נפתור את המשוואה הריבועית ונקבל את שתי הפתרונות. רק אחד מהם מתאים כן הבעיה. נחזור לנעלם b ונחשב תשובה סופית.

עזרה לשלב/פעולה

האינטגרציה

דוגמת התרגיל: נתון שערך האינטגרל המסוים $\int_2^b (10x^7 - 9x^3) dx$

שווה ל- 26 . מצא את גבול העליון b של האינטגרציה ($b > 2$).

דוגמת השלב: חשב אינטגרל מסוים.

חישובים: $\int_2^b (10x^7 - 9x^3) dx = \left(\frac{10}{8} x^8 - \frac{9}{4} x^4 \right) \Big|_2^b = 26$

תוצאת השלב: $\left(\frac{5}{4} x^8 - \frac{9}{4} x^4 \right) \Big|_2^b = 26$

כללי האינטגרציה ואינטגרלים מיידיים

כתיבת המשוואה עבור b

$$\left(\frac{5}{4}x^8 - \frac{9}{4}x^4\right)^2 \quad \text{דוגמת השלב:}$$

$$\frac{5}{4}b^8 - \frac{9}{4}b^4 - \left(\frac{5}{4} \cdot 2^8 - \frac{9}{4} \cdot 2^4\right) = 26 \quad \text{חישובים:}$$

נפתח את הסוגריים, ונעבור את 26 באגף שמאל:

$$\frac{5}{4}b^8 - \frac{9}{4}b^4 - \frac{5}{4} \cdot 2^8 + \frac{9}{4} \cdot 2^4 - 26 = 0$$

נכפול ב-4, נפשט את הביטוי ונקבל את המשוואה עבור b:

$$5b^8 - 9b^4 - 1240 = 0$$

החלפת המשתנה

$$5b^8 - 9b^4 - 1240 = 0 \quad \text{דוגמת השלב:}$$

חישובים: נסמן ב-t את הביטוי b^4 ונעבור למשתנה החדש:

$$t = b^4$$

$$5t^2 - 9t - 1240 = 0$$

$$5t^2 - 9t - 1240 = 0;$$

$$t = b^4$$

תוצאת השלב:

מציאת שורשי המשוואה

$$5t^2 - 9t - 1240 = 0; \quad \text{דוגמת השלב:}$$

$$t = b^4$$

חישובים: נפתור את המשוואה הריבועית עבור t

ונמצא את השורשים:

$$5t^2 - 9t - 1240 = 0$$

נחשב את הדיסקרימיננטה של המשוואה:

$$D = 9^2 + 4 \cdot 5 \cdot 1240 = 24881$$

אז השורשים הם:

$$t_1 = \frac{9 + \sqrt{24881}}{10} = 16.674, \quad t_2 = \frac{9 - \sqrt{24881}}{10} = -14.874$$

עזרה לשלב/פעולה

חישוב ה-b

דוגמת השלב: נחזור לנעלם המקורי b ונמצא את ערכו.
 תוצאות הקודמות: $t_1=16.674, t_2=-14.874$

חישובים: מכיון ש- $t=b^4$ ערך ה- t לא יכול להיות מספר שלילי, לכן t_2 הוא שורש זר.

נפתור את המשוואה: $b^4=16.674$
 למשוואה הזו יש שני פתרונות ממשיים:

$$b_1=\sqrt[4]{16.674}=2.021 \quad b_2=-\sqrt[4]{16.674}=-2.021$$

מתנאי הבעיה $b>2$ מכאן נובע ש- $b=-2.021$ הוא שורש זר.

תוצאת השלב/הפעולה

חישוב ה-b

$$b=\sqrt{10.242}=3.2$$