

## משוואות דיפרנציאליות מדויקות

תרגיל 1. פתרו בעיית התחלה:

$$y(1) = 0, y' = \frac{5x - y}{1x + 8y}$$

תרגיל 2. מצאו פתרון כללי של המשוואה:

תרגיל 3. פתרו את בעיית התחלה הבאה:

$$y(1) = 0, \left(-7y - \frac{8}{x}\right) dx + (7x + 3x^2 e^y) dy = 0$$

תרגיל 4. מצאו פתרון כללי של המשוואה:

$$\left(16e^{4x} \cdot y - 3\sin(3x)\right) dx + \left(8e^{4x} + \frac{\cos(3x)}{y} + \frac{4e^{-2y}}{y}\right) dy = 0$$

תרגיל 5. מצאו פתרון כללי של המשוואה:

$$y' \cdot x + 6y = x^{-6} (\ln x)^3$$

תרגיל 6. מצאו פתרון כללי של המשוואה:

$$y' + \tan x \cdot y = 5y^5 \sin x$$

תרגיל 7. מצאו את משוואת העקום שעובר דרך הנקודה (0),

ושיפוע המשיק שלו בכל נקודה (x,y) שווה ל:  $3x + y$ .

תרגיל 8. מצאו את משוואת העקום שעובר דרך הנקודה (0, 1)

והנורמל שלו בכל נקודה (x,y) עובר בנקודה (-2, 3).

תרגיל 9. האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית (כלומר בכל רגע קצב הגידול פרופורציונאלי לערכו).

בשנה מסוימת היו בעיר 60 אלף תושבים ולאחר 5 שנים היו 65 אלף תושבים.

מצאו, לאחר כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 72 אלף תושבים?

תרגיל 10. ממיכל בצורת התיבה זורמים מים בפתח שבתחתית התיבה. שטח בסיס התיבה הוא 36 סמ"ר.

קצב זרימת המים פרופורציונאלי לשורש מגובה המים. בזמן מסוים היה גובה המים שווה ל-36 ס"מ

ולאחר 4 שעות היה שווה ל-9 ס"מ. כעבור כמה זמן (החל מהזמן המסוים) היה הגובה שווה ל-2.25 ס"מ?

שימו לב:

- א. כל תרגיל מכיל פרמטרים אקראיים  
ב. כל תרגיל מלווה בפתרון מפורט ב"לימוד" וב"תרגול". במבחן הפתרון לא נגיש.

דוגמה:

תרגיל 1. פתרו בעיית התחלה:  
 $y(1) = 0, y' = \frac{5x - 6y}{6x + 6y}$

עזרה כללית ורשימת השלבים/הפעולות

### עבודה 1

תאור כללי

המשוואה היא הומוגנית. נעשה הצבה  $u = x \cdot y$  ונקבל משוואה הניתנת להפרדת משתנים.

שלבים/פעולות

דוגמה של פתרון

תרגיל 1. פתרו בעיית התחלה:  
 $y(1) = 0, y' = \frac{5x - 6y}{6x + 6y}$

עזרה לפעולה

### דוגמה של פתרון

פתרו בעיית התחלה הבאה:  $y(1) = 0, y' = \frac{5x - 6y}{6x + 3y}$

פתרון. נעשה הצבה  $u = \frac{y}{x}$ . נקבל:  $\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{5 - 12u - 3u^2}{6 + 3u}$ . מכאן:  $\frac{6 + 3u}{5 - 12u - 3u^2} du = \frac{dx}{x}$ . ואז:  $\int \frac{6 + 3u}{5 - 12u - 3u^2} du = \ln|x| + c$

נחשב את האינטגרל. נעשה הצבה  $5 - 12u - 3u^2 = t$  ונמצא:

$$(6 + 3u) du = \left(-\frac{1}{2}\right) dt - dt = (-6u - 12) du = -2(3u + 6) du$$

מכאן:  $\int \frac{6 + 3u}{5 - 12u - 3u^2} du = \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{1}{t} dt = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln|t| = \left(-\frac{1}{2}\right) \ln|5 - 12u - 3u^2|$

נציב ערך האינטגרל:  $\left(-\frac{1}{2}\right) \ln|5 - 12u - 3u^2| = \ln|x| + c$ , מכאן:

$$-2c = \ln|c|. \text{ נסמן } \ln|5 - 12u - 3u^2| = -2\ln|x| - 2c$$

ונקבל:  $\ln|5 - 12u - 3u^2| + 2\ln|x| = \ln|c|$ . נציב  $u = \frac{y}{x}$

ונמצא את הפתרון הכללי:  $5x^2 - 12x \cdot y - 3y^2 = c$ . נציב:  $x = 1, y = 0$

ונמצא  $c = 5$ , ואז הפתרון הפרטי הוא:  $5x^2 - 12x \cdot y - 3y^2 = 5$

שלבים/פעולות

דוגמה של פתרון