# קבוצות

בשנות ה-70 של מאה ה-19 גיאורג קנטור המציא תחום חדש של מתמטיקה - תורת הקבוצות.

## 1. קבוצות ואיברים של קבוצות

מושג מתמטי שמבטא את האיחוד של עצמים, גופים או מושגים בגוף אחד הוא - קבוצה.
זהו מושג בסיסי שלא ניתן להגדרה, כמו נקודה וישר.

דוגמאות:

א. קבוצת כל בני אדם החיים היום על פני כדור הארץ

ב. קבוצת כל הדגים באוקיינוס.

ג. — // — כוכבים

ד. — // — מספרים טבעיים

ה. — // — כל מספרים ממשיים x המקיימים תנאי $0 \le x \le 2$

ו. — // — כל נקודות M של מישור הנמצאות במרחק שווה מנק' O.

ז. — // — זוגות מספרים $(x,y)$: $3x+2y \le 0$

הגדרה של קנטור: "קבוצה היא אוסף של רבים, המתקבל על-ידינו כאחד שלם."

איברים.

קבוצות מסמנים באותיות גדולות $A, B, C, \ldots, X$,
איברים - קטנות: $a, b, c, \ldots$

$a \in A$ ( a שייך ל-A )

$a \notin A$ ( a אינו שייך .. )

A ו- B שווים אם הם כוללות את אותם האיברים.

$A = \{1,2,3\} = B = \{3,1,2\}$.

## קבוצה סופית ואינסופית

קבוצה ריקה: $\emptyset$

2 שיטות הגדרת הקבוצה:

א. למנות את כל האיברים: $\{2; 4; 6\}$ - מתאית
רק לקבוצה סופית (וגם לא תמיד!)

ב. להגדיר תכונה מאפיינת של הקבוצה, $P$:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

$$A = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$$

בגיאומטריה - מקום גיאומטרי. (חוצה זווית, מעגל)

$$B = \{M \mid F_1M + F_2M = 10\},$$

$F_1, F_2$ - נק' קבועות - אליפסה.

**דוגמה**

לבדוק האם $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{3}$ שייכים לקב'

$$A = \left\{ \frac{n^2}{n^2+16} \;\middle|\; n \in N \right\}$$

$N$ - קב' מס' טבעיים.

פתרון

$$\frac{n^2}{n^2+16} = \frac{1}{2}, \quad 2n^2 = n^2+16, \quad n^2 = 16, \quad n = \pm 4.$$

$$4 \in N, \quad \frac{1}{2} = \frac{n^2}{n^2+16} \Rightarrow \frac{1}{2} \in A.$$

$$\frac{n^2}{n^2+16} = \frac{1}{3}, \quad 3n^2 = n^2+16, \quad n^2 = 8, \quad n = 2\sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{3} \notin A.$$

## תרגילים

1) מנו איברים הקבוצה בעלת תכונה אופיינית:

א) $A = \{ x \mid x^2 - 8x + 15 = 0 \}$

ב) $A = \{ x \mid -11 < x \le -3,\ x \in N \}$

2) נחשו תכונה אופיינית לאיברי הקבוצה:

א) $\left\{ \frac{3}{4};\ \frac{4}{9};\ \frac{5}{16};\ \frac{6}{25}; \dots \right\}$

ב)

## קבוצות מספרים

R - מס' ממשיים
$R_+$ - ממשיים חיוביים
$R_-$ - // - שליליים
Q - רציונליים
Z - שלמים
N - טבעיים

$[a; +\infty) = \{ x \mid x \ge a \}$
$(-\infty; a] = \{ x \mid x \le a \}$
קרניים מספריים

קטעים: $[a; b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

גם: $(a; b) = \{ x \mid a < x < b \}$
$[a; b) =$
$(a; b] =$
$(a; +\infty) = \{ x \mid x > a \}$
$(-\infty; a) = \{ x \mid x < a \}$.

קבוצת פתרונות המשוואה:

$x^2 - 8x + 15 = 0, \quad x_1 = 5, \ x_2 = 3.$
$\{5; 3\}$

קבוצת הערכים של x שעבורם המשוואה היא בעלת משמעות:

$$\sqrt{25 - x^2} = \frac{4}{x-2}$$

$25 - x^2 \ge 0, \quad x \in [-5; 5]$

$x \ne 2: \quad x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty).$ - איחוד

חיתוך: $[-5; 2) \cup (2; 5]$

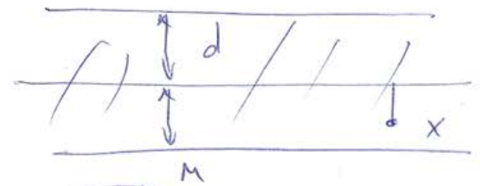
## קבוצות נקודות במישור

(4)

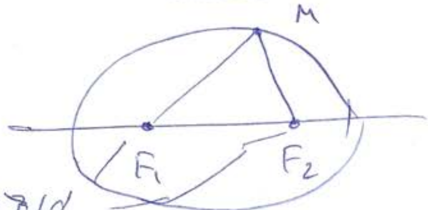
לעיתים קרובות מגדירים קבוצות של נק' באמצעות התכונה האופיינית:

מעגל ($OX = R$), עיגול ($OX \le R$)

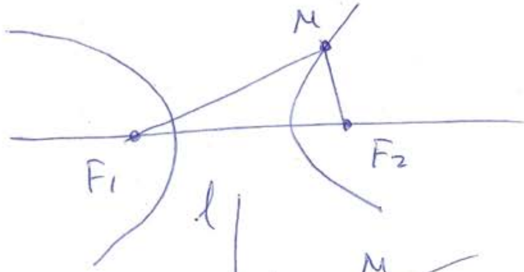
רצועה - $xl \le d$



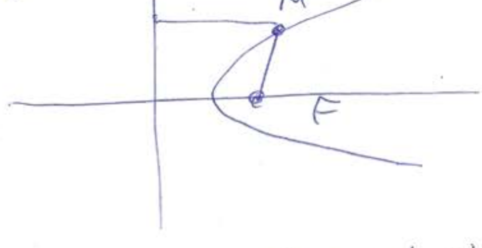

אליפסה: $MF_1 + MF_2 = 2a$




היפרבולה: $|MF_1 - MF_2| = 2a$




פרבולה: $MF = Ml$




אפשר להגדיר את קבוצות הנקודות במישור גם באמצעות משוואות:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

---

עקומה $F(x,y)=0$ מחלקת את המישור לאזורים $F(x,y) \gtrless 0$. כדי לדעת האם > או < צריך לקחת נק' כלשהי ולבדוק. דוגמה: $y = 2x+1$ ($y-2x-1=0$)

## תת - קבוצות

אם $A \neq \emptyset$ אז ממנו ניתן ליצור קבוצות אחר המייצגות אותו.

מספרים זוגיים, ראשוניים, מכפלות של 3 - כולן תת-קבוצות של קב' מספרים טבעיים.

$$B \subset A.$$

דוגמה: $A$ - קב' כל מרובעים
$B$ - טרפזות
$C$ - מקבילים
$D$ - מלבנים
$E$ - ריבועים

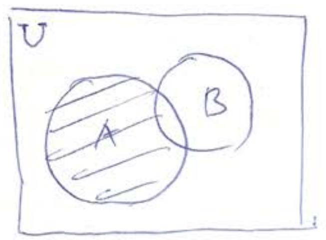
$$E \subset D \subset C \subset B \subset A.$$

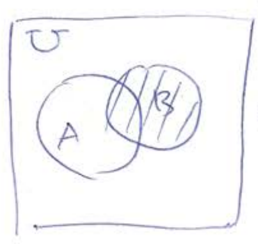
---

## חיתוך קבוצות

$U$ - קבוצה אוניברסלית (במתמטיקה - מספרים רציו וחיוביים, באלגברה - מספרים מרוכבים ופונקציות אלגבריות)

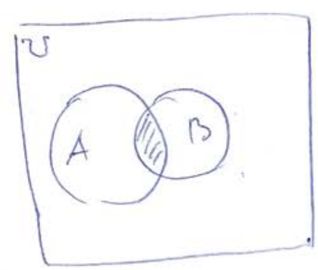
דיאגרמות אוילר:

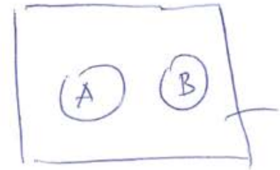



אך ורק את האיברים השייכים בו-זמנית ל-$A$ ול-$B$.

$$A \cap B$$




$$A \cap B = \emptyset$$

דוגמה: $A$ - קב' כל המעויינים,
$B$ - ~~ריבועים~~ מלבנים
$A \cap B$ - ריבועים.