הסתברות

הגדרות	דוגמאות
מְאוֹרָע מקרה, מעשה, התרחשות, אירוע שקרה, או יכול שיקרה ויכול שלא יקרה. תוצאות הניסויים, תצפיות ומדידות גם הן נחשבות למאורעות.	הופעת מספר 5 על דופן עליון של קוביית-משחק ; הופעת סמל על פני המטבע המוטל ; לידת 5 בנים ברצף במחלקת יולדות ; ליקוי חמה ; ירידות המניות בבורסה.
המאורע יכול להיות **וודאי**, **בלתי אפשרי ואקראי**. **מאורע וודאי** – המאורע שיתרחש בוודאות בתנאים הקיימים. **מאורע בלתי אפשרי** – המאורע שאינו יכול להתרחש בתנאים הקיימים. **מאורע אקראי** – המאורע שבתנאים הקיימים יכול להתרחש ויכול שלא יתרחש. **מאורעות בלתי תלויים** המאורעות שהתרחשות של כל אחד מהם אינה מושפעת מעובדת ההתרחשות או אי-התרחשות של האחר. **מאורעות זרים** המאורעות שאינם יכולים להתרחש בבת אחת. **מאורעות משלימים** המאורע $\overline{A}$ מכונה **משלים** למאורע A, אם הוא מתרחש בוודאות כאשר המאורע A אינו מתרחש.	*מאורע וודאי* : 1) לאחר יום ה׳ הופיע יום ו׳ ; 2) בהטלת הקובייה הופיע מספר הקטן מ- 7. *מאורע בלתי-אפשרי* : 1) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 7 ; 2) המים בנחל קפאו בטמפרטורה $+25\ ^\circ C$. *מאורע אקראי* : 1) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 2 ; 2) ביום ב׳ התלמיד הלך לבית-ספר ; *מאורעות בלתי-תלויים* : 1) יורד גשם ומניות בבורסה עולות ; 2) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 7, בהטלה הבאה הופיע 2. *מאורעות זרים* : 1) השחר עלה, על השמיים הופיעו כוכבים ; 2) בהטלת קוביית-משחק פעמיים, הופיע מספר 1 וסכום המספרים בשתי ההטלות הוא 12. *מאורעות משלימים* : 1) זכייה ואי-זכייה בהגרלה ; 2) ניצחון והפסד במשחק ; 3) הופעת מספר זוגי והופעת מספר אי-זוגי בהטלת קוביית-משחק.

הסתברות

הגדרות	דוגמאות
מאורע חד-שלבי מעורה יחיד, המבטא התרחשות או תוצאה בודדת.	*מאורע חד-שלבי* : 1) הופעת מספר 2 על-גבי קוביית- משחק הטלה בודדת ; 2) קלע לא פוגע במטרה בניסיון ירי ראשון.
מאורע דו-שלבי המאורע שמורכב משני מאורעות חד-שלביים.	*מאורע דו-שלבי* : 1) סכום המספרים המופיעים על-פני שתי קוביות-משחק (לאחר שתי הטלות) שווה ל- 7. 2) שני הקלעים פגעו במטרה בניסיון ירי ראשון.
מאורע רב-שלבי המאורע שמורכב ממספר מאורעות חד-שלביים (עוקבים או מתרחשים בו-זמנית).	
מאורעות שווי-סיכוי מאורעות שונים שסיכויי התרחשותם שווים.	*מאורעות שווי-סיכוי* : 1) הופעות של מספרים שונים בהטלת קוביית- משחק ; 2) הופעת סמל או מספר על פני המטבע שנזרקה.
הערה : לעתים קרובות אפשר להסיק לגבי שוויון סיכויי ההתרחשות משיקולי *סימטריה* או אי-מתן עדיפות למאורע זה או אחר משיקולים אחרים.	*מאורעות שאינם שווי-סיכוי* : 1) נפילת הכריך עם חמאה על צד זה או אחר (מרכז הכובד של הכריך נמצא קרוב יותר לצד המרוח) ; 2) משיכת קוביית-דומינו בעלת מספרים שווים (דַבֶל) ומשיכת הקובייה בעלת מספרים שונים (סך הכל ישנן 7 קוביות דבל ו- 21 קוביות אחרות).

בחיי יום-יום המושג *מאורע* מסמן אירוע משמעותי ; במתמטיקה הוא מסמן כל תוצאה אפשרית של המצב הנדון. לראשונה השתמשו במושג זה בניתוח מחשקי מזל במאה – 17 המתמטיקאים הצרפתיים בְלֶז פַּסְקָל ופייר פֶּרְמַה. חוקי המאורעות האקראיים שולטים בין היתר גם בתהליך יצירת המולקולות ה- DNA, הנושאות את המידע הגנטי של האדם.

הסתברות

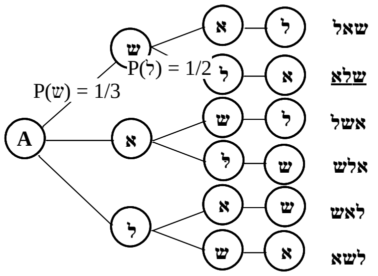
הגדרות	דוגמאות
הסתברות היא מדד הסיכוי להתרחשות מאורע מסוים. **הסתברות P** שווה ליחס בין מספר הופעות המאורע הנדון A (*המאורע הרצוי*) למספר כל האפשרויות. ערכי ההסתברות נמצאים בתחום בין 0 ל-1: $0 \le P(A) \le 1$. מאורע בלתי אפשרי הוא בעל הסתברות 0, ומאורע ודאי הוא בעל הסתברות 1.	1) הסתברות ההופעה של מספר 2 על-גבי קוביית-משחק שווה ל- $P(A) = \frac{1}{6}$ (מספר כל התוצאות האפשריות הוא 6, ומספר הופעות הספרה 2 הוא 1). 2) הסתברות הזכייה בלוטו של האדם שלא קנה כרטיס שווה ל- 0. 3) הסתברות ההופעה של מספר **או** סמל על פני המטבע שנזרקה שווה ל- 1.
הסתברות של מעורה משלים סכום הסתברויות של מאורע ומעורה משלים שווה ל- 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ הסתברות של מעורה משלים היא: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	הסתברות הפגיעה של הקלע במטרה נעה היא $P(A) = 0.8$. (A מסמן אירוע הפגיעה) הסתברות ההחטאה היא: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$
ההסתברות של איחוד מאורעות זרים אם P(A) היא הסתברות המאורע A, ו- P(B) - הסתברות המאורע B, שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחד (כלומר, A ו- B הם מאורעות זרים), אזי הסתברות ההתרחשות של **אחד משני המאורעות (איחוד המאורעות)** P(C) שווה לסכום ההסתברויות של כל של כל אחד מהמאורעות: $P(C) = P(A) + P(B)$ *הערה*: טענה זו מתקיימת גם כאשר מספר המאורעות הזרים הוא גדול מ- 2 (ראו דוגמה).	1) בהטלת קוביית-משחק הסתברות ההופעה של כל מספר שהו היא 1/6. למאורע "יופיע מספר זוגי", שהוא איחוד המאורעות הזרים של קבלת המספרים 2, 4, או 6, יש הסתברות: $P(2, 4, 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

הסתברות

הגדרות	דוגמאות
ההסתברות של חיתוך של מאורעות בלתי תלויים אם $P(A)$ היא הסתברות המאורע A, ו- $P(B)$ - הסתברות המאורע B, **שיכולים לקרות יחדיו**, אזי ההסתברות $P(C)$ שכל המאורעות יקרו יחדיו **(איחוד המאורעות)**, שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות: $P(C) = P(A) \text{ x } P(B)$ *הערה*: טענה זו מתקיימת גם כאשר מספר המאורעות הבלתי-תלויים הוא גדול מ- 2 (ראו דוגמה).	*מטילים קובייה 3 פעמים. מה ההסתברות שספרה 6 תופיע לפחות פעם אחת?* מכיוון שהופעת כל ספרה אינה תלויה בתוצאה הקודמת, המאורעות הם בלתי-תלויים. נמצא קודם הסתברות המאורע המשלים: שספרה 6 לא תופיע אפילו פעם אחת. עבור זריקה בודדת הסתברות כזאת שווה ל- $5/6$ (5 תוצאות "רצויות" מסך הכל 6 אפשרויות). עבור 3 זריקות נקבל הסתברות של אי-הופעת ספרה 6 כחיתוך המאורעות: $P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$ הסתברות המאורע המבוקש שווה: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$ $= 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.42$
ההסתברות של איחוד מאורעות בלתי תלויים את המאורע המהווה איחוד של כמה מאורעות זרים, שכל אחד מהם מורכב ממספר מאורעות בלתי-תלויים, אפשר להציג בצורה של עץ, כאשר אוסף הענפים מייצגים קבוצת המאורעות הזרים, וכל ענף מורכב מסדרת מאורעות בלתי-תלויים.	1) בקופסה 3 קוביות-משחק זהות: אדומה (א), שחורה (ש) ולבנה (ל). מוצאים את הקוביות באופן אקראי, אחת אחר שנייה. מה ההסתברות, שסדר הופעת הקוביות יהיה (ש) – (ל) – (א) ? **פתרון** מציירים עץ האפשרויות, ובוחרים בו את הענף (הענפים) המתאים:

הסתברות

הסתברות המאורה הרצוי שווה לסכום הסתברויות כל הענפים "הרצויים", כאשר הסתברות הענף שווה למכפלת ההסתברויות של המאורעות הבלתי-תלויים, שמהם הענף מורכב.



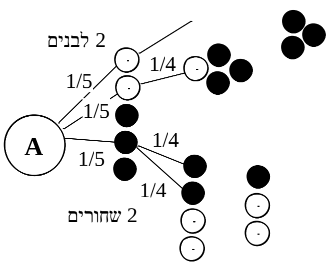
הענף המתאים הוא "**שלא**"; הסתברות הופעתו שווה למכפלת הסתברויות ההופעה של קובייה שחורה (1/3), קובייה לבנה אחרית (1/2) (מכיוון שהבחירה היא בין הלבנה לאדומה), וקובייה אדומה (1) (מכיוון שהיא נשארה יחידה ותופיע בוודאות):

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

דוגמה 2

בקופסה שני כדורים לבנים ושלושה שחורים. מוצאים באקראי שני כדורים יחד. מה הסתברות המאורע: 1) שני הכדורים הם לבנים; 2) שני הכדורים הם שחורים; 3) שני הכדורים הם לבן ושחור.

פתרון



1) קיימים 2 ענפים מתאימים (ראו ציור). הסתברות של כל ענף היא מכפלת הסתברויות הבחירה של כדור לבן ראשון (1/5) וכדור שני לבן (1/4):

$$P_1 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

הסתברות המאורע הראשון היא:

$$P(1) = 2 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

2) עבור כל כדור שחור ראשון קיימים 2 ענפים אפשריים (ראו ציור). הסתברות המאורע 2) היא איפו:

$$P(2) = 3 \times \left(2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

3) ספירת ענפי העץ האפשריים: 2 ענפים המתחילים בכדור לבן ואחריו 3 ענפים העוברים דרך כדורים שחורים; ו- 3 ענפים המתחילים בכדור שחור ואחריו 2 ענפים העוברים דרך כדור לבן:

$$P(3) = 2\times\left(3\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right) + 3\times\left(2\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{2\cdot 6}{20} = \frac{3}{5}$$