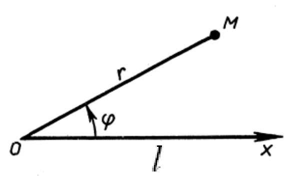
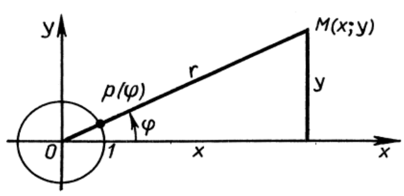
מספרים מרוכבים

היחידה המדומה **הגדרה** $i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$	**חזקות היחידה המדומה** $i^2 = -1 \qquad i^{4k} = 1$ $i^3 = -i \qquad i^{4k+1} = i$ $i^4 = 1 \qquad i^{4k+2} = -1$ $i^5 = i \qquad i^{4k+3} = -i$
הצורה האלגברית $Z = (a, b) = a + bi$ **המספר הצמוד:** $\overline{Z} = a - bi$ **כלל:** לכל מספר מרוכב קיים מספר צמוד מתאים.	**חיבור** מספרים מרוכבים $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$ **חיסור** מספרים מרוכבים $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$
כפל מספרים מרוכבים **סכום מספר מרוכב ומספר הצמוד לו הוא מספר ממשי** **כפל מספר מרוכב במספר צמוד הוא מספר ממשי**	$(a+bi) \times (c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ $(a+bi) + (a-bi) = 2a$ $(a+bi) \times (a-bi) = a^2 + b^2$
חילוק מספרים מרוכבים הרשומים בצורה אלגברית: $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ $a_2 + b_2 i \neq 0$	**כלל:** החילוק מתבצע על ידי הכפלת המונה והמכנה במספר הצמוד למכנה. $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$ $= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

הצורה הטריגונומטרית להצגת המספר המרוכב $Z = a + bi$





$$Z = a + b \cdot i = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

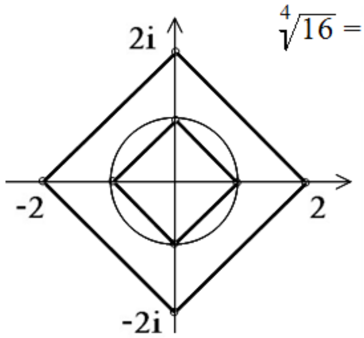
פעולות עם מספרים מרוכבים (המשך)

דוגמאות

.1
$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16(\cos 0 + i\cdot\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{4}\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

תצוגה גרפית של הפתרון :



דוגמה 2

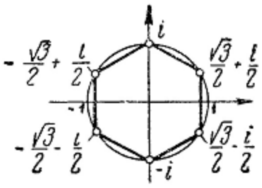
$$\sqrt[6]{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right),$$

$$k = 0,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3,\ 4,\ 5$$

הפתרון :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),\ i,\ \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right),\ -i,\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$$



דוגמה 3

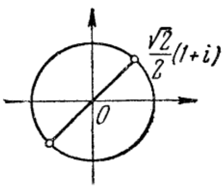
$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right),$$

$$k = 0,\ 1$$

שני הפתרונות :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$



שורש ריבועי ממספר מרוכב

$$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

הערה: לשורש ממעלה n ממספר מרוכב (וגם ממספר ממשי או מספר מדומה, שהם מקרים פרטיים של מספרים מרוכבים) תמיד **n ערכים** שונים.

$$\left(\sqrt{Z}\right)_1 = \sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{Z}\right)_2 = -\sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

מספרים מרוכבים (המשך)

פעולות עם מספרים מרוכבים
הרשומים בצורה הטריגונומטרית

כפל מספרים מרוכבים: **הערך המוחלט** של המכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים של שני המספרים, **והארגומנט** של המכפלה שווה לסכום הארגומנטים.	$Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \bullet \sin\varphi_1)$ $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \bullet \sin\varphi_2)$ $Z_1 \bullet Z_2 = r_1 \bullet r_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \bullet \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
חילוק מספרים מרוכבים: **הערך המוחלט** של המכפלה שווה למנת הערכים המוחלטים של שני המספרים, **והארגומנט** של המכפלה שווה להפרש הארגומנטים.	$Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \bullet \sin\varphi_1)$ $Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \bullet \sin\varphi_2)$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \bullet (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \bullet \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
העלאת המספר המרוכב **בחזקה** משתמשים **בנוסחת דה-מואבר**: (המעריך – שלם וחיובי) הערך המוחלט מועלה באותה חזקה, הארגומנט מוכפל במעריך.	$Z^n = r^n \bullet (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

שורש מספר מרוכב

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i \ \ \sin\varphi} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \ \ \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

הערך המוחלט מועלה באותה חזקה, הארגומנט מוכפל במעריך.
הערה: לשורש ה- n של מספר מרוכב ישנם n ערכים.

דוגמאות

.1

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16(\cos \ \ 0 + i \ \ \sin \ \ 0} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i \ \ \sin\frac{2k\pi}{4}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

מתקבלים 4 ערכים של השורש:

$2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i0)$

$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \ \ \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i) = 2i$

$2(\cos\pi + i \sin\pi) = -2, \quad 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \ \ \sin\frac{3\pi}{2}\right)$