קומבינטוריקה	
תמורות קבוצות המכילות אותם העצמים, ונבדלות בסדר הופעתם בלבד. אם כל עצמים שונים, אז מספר כל התרומות האפשריות **בלי חזרות** מ-n עצמים מסמנים ב- P_a.	$Pn = P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ ($n!$ נקרא **עצרת** של n)
אם בין העצמים יש p עצמים מסוג אחד, q עצמים מסוג שני, r עצמים מסוג שלישי וכו׳, אז מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש עצמים זהים הוא :	$p_n = P_n(p, q, r, \ldots) = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \ldots}$
דוגמה 1 כמה מספרים בעלי 4 ספרות אפשר לכתוב בעזרת הספרות 1, 2, 3, 4 אם כל ספרה נכנסת במספר פעם אחת בלבד?	**פתרון** המספר שווה למספר התמורות מארבעה עצמים בלי חזרות : $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
דוגמה 2 כמה מספרים בעלי 4 ספרות אפשר לכתוב בעזרת הספרות 1 ו- 2 אם כל ספרה נכנסת במספר פעמיים?	**פתרון** המספר שווה למספר התמורות מארבעה עצמים כאשר כל עצם מופיע פעמיים : $P_4(2, 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$
חליפות של k מתוך n צירופים המכילים k עצמים שנבחרו מקבוצה של n עצמים. שתי חליפות נחשבות שונות זו מזו, אם העצמים המרכיבים אותן או סדר הופעתם שונה בשתי החליפות. אם כל n העצמים שונים זה מזה, והם לא חוזרים על עצמם בחליפות, אז מספר כל החליפות בנות k עצמים **בלי חזרות** מ- n עצמים מסומנים ב- A_n^k.	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ **דוגמה** מספר המספרים הדו-ספרתיים הרשומים בעזרת הספרות 1, 2, 3 בלי חזרות שווה : $A_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$

קומבינטוריקה (המשך)

חליפות של k מתוך n עם חזרות

אם כל n העצמים שונים זה מזה, אולם בתוך החליפות **חזרות מותרות**, מספר החליפות יהיה:
$A_{n\ \text{עם חזרות}}^{k} = n^k$

דוגמה

מספר המספרים דו-ספרתיים הרשומים בעזרת הספרות 1, 2, 3 **עם חזרות** שווה:

$$A_{n\ \text{עם חזרות}}^{k} = 3^2 = 9$$

צירופים

צירופים מכילים k עצמים שנבחרו מקבוצה של n עצמים. שני צירופים נחשבים שונים, אם הם נבדלים לפחות בעצם אחד.

סימון הצירופים: $C_n^k = \binom{n}{k}$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\bullet 2\bullet 3...\bullet k}$$

צירופים עם חזרות

$$C_{n\ \text{עם חזרות}}^{k} = C_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

עבור מספרים שלמים וחיובים r ו-n מתקיים:

$$C_n^r = \begin{cases} C_n^{n-r} & r < n \\ O & r > n \end{cases}$$

$$C_{n+1}^{r} = C_n^r + C_n^{r-1}$$

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^{r} + C_{n-2}^{r} + ... + C_r^r$$

קשרים בין מספרי התמורות, חליפות וצירופים:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k \bullet P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}$$

בינום ניוטון

חישוב הביטויים מהסוג $(x \pm a)^n$ דורש חישוב מקדמים לפני האיברים של רב-האיבר המתקבל, כדוגמה:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$$

$$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4$$

<table>
<tr><th colspan="2">בינום ניוטון (המשך)</th></tr>
<tr><td>פירוק בינום:</td><td>$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm$$ $$\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n a^n$$</td></tr>
<tr><td>צורות אחרות לנוסחת פירוק בינום:
הערה: $C_n^0 = C_n^n = 1$</td><td>$$(x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 \pm$$ $$\pm C_n^3 x^{n-3} a^3 + \ldots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 \pm$$ $$\pm\binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \ldots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">תכונות מקדמי הפירוק</th></tr>
<tr><td>1. סדר האיברים: מעריכים של x הולכים וקטנים, מעריכים של a – הולכים וגדלים.</td><td>סכום המעריכים של x ושל a בכל איבר היא קבועה ושווה ל- n.</td></tr>
<tr><td>2. מספר האיברים גדול ב-1 ממעריך של בינום.</td><td>$N = n + 1$</td></tr>
<tr><td>3. נוסחת האיבר הכללי:</td><td>$C_n^k x^{n-k} a^k$</td></tr>
<tr><td>4. המקדמים של איברי הקצה והאיברים המרוחקים מהם באופן סימטרי שווים בינם לבין עצמם.</td><td>5.סכום מקדמי האיברים הנמצאים במקומות זוגיים שווה לזה של האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים.</td></tr>
<tr><td>6. סכום כל מקדמי הפירוק של הבינום $(x + a)^n$:</td><td>$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$</td></tr>
<tr><td>7. סכום כל מקדמי הפירוק של הבינום $(x - a)^n$:</td><td>$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} +$$ $$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$$</td></tr>
</table>