

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

### גבולות

$\lim c = c$	גבול של קבוע $c$ שווה לקבוע עצמו :	
$\lim [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] =$ $= \lim f_1(x) + \lim f_2(x) - \lim f_3(x)$	גבול הסכום האלגברי של מספר סופי של פונקציות שווה לסכום האלגברי של גבולות המחוברים :	
$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)] =$ $= \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \lim f_3(x)$	גבול המכפלה של מספר סופי של פונקציות שווה למכפלת הגבולות :	
$\lim c \cdot f(x) = c \cdot \lim f(x)$	גורם קבוע מותר להוציא מחוץ לסימן הגבול :	
$\lim (x^m) = (\lim x^m), \quad \lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}$		
$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}$ $\lim f_2(x) \neq 0$	גבול המנה של שתי פונקציות שווה למנת הגבולות, בתנאי שגבול המכנה לא שווה לאפס :	
<b>גבולות מיוחדים</b>		
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ <p style="text-align: center;">או</p> $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$	הגבול הבא נקרא מספר $e$ : מספר $e$ הוא מספר טרנסצנדנטי. ערכו המקורב : $e \approx 2.71828$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $a > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ <p style="text-align: right;">-m מספר כלשהו</p>

<b>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי</b>	
<b>חוקי גזירה</b>	
נתון: $k$ - מספר קבוע, $u(x)$ ו- $v(x)$ - שתי פונקציות שלהן קיימות נגזרות בקטע $(a; b)$	
$(5x)' = 5$ $\left(\frac{1}{6} \sin x\right)' = \frac{1}{6} \cos x$ $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$	$(k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$ <p>את הגורם הקבוע מותר להוציא מחוץ לסימון הנגזרת.</p>
$y = x^3 + 4x^2 + 7x + 1$ $y' = (x^3)' + 4(x^2)' + 7(x)' + (1)' = 3x^2 + 8x + 7$	$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ <p>נגזרת של הסכום האלגברי של מספר פונקציות שווה לסכום הנגזרות.</p>
$y = x^2 \cdot \sin x$ $y' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$	<p>נגזרת המכפלה של שתי פונקציות:</p> $(uv)' = u'v + uv'$
$y = \frac{x^3}{\sin x}, \sin x \neq 0$ $y' = \frac{(x^3)' \cdot \sin x - (x^3) \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$	<p>נגזרת המנה של שתי פונקציות:</p> $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
<b>נגזרת הפונקציה של פונקציה (פונקציה מורכבת)</b>	
אם $y$ היא פונקציה של $u$ : $y = F(u)$ , כאשר $u$ עצמה היא פונקציה של $x$ : $u = f(x)$ אז הפונקציה $y = F(u) = F(f(x))$ נקראת פונקציה של פונקציה או פונקציה מורכבת.	
$y'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$	נגזרת של פונקציה מורכבת:

## נגזרות של פונקציות מורכבות

פונקציה	נגזרת	פונקציה	נגזרת
$(u)^n$	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$\sin u$	$(\cos u) u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\cos u$	$(-\sin u) u'$
$a^u$	$a^u \ln a \cdot u'$	$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$e^u$	$e^u \cdot u'$	$\cot u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

**דוגמאות.** מצאו נגזרות של הפונקציות הבאות.

$u = x^2 + 3x, u' = 2x + 3$ $y = u^3, y' = (u^3)' = 3u^2 u' = 3(x^2 + 3x)^2 (2x + 3)$	$y = (x^2 + 3x)^3$
$u = 2x; u' = 2$ $y = \sin u; y' = (\sin u)' = (\cos u) u' = 2 \cos 2x$	$y = \sin 2x$
$u = 2x + 1, u' = 2$ $y = \ln u, y' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x+1}$	$y = \ln(2x + 1)$
$u = x^3 + 4x, u' = 3x^2 + 4$ $y = \sqrt{u}; y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$	$y = \sqrt{x^3 + 4x}$
$u = 3x; u' = 3$ $y = e^u, y' = (e^u)' = e^u u' = 3e^{3x}$	$y = e^{3x}$

### אינטגרלים לא מסוימים

$$1. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C =$$

$$= -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C_1$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

נגזרות ואינטגרלים לא-מסוימים		
פונקציה $F(x)$	נגזרת $F'(x)$	אינטגרל לא-מסוים $\int F(x) dx$
$C$	$0$	$Cx$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	—
$\log_\alpha x$	$\frac{1}{x \ln a}$	—
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	—
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	—