אם נציב $\beta = \alpha$ בנוסחה לסינוס של סכום, נקבל נוסחה ל**סינוס של זווית כפולה**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

לכן: $$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} \qquad (1)$$

דוגמה 1 נתון: $\sin\alpha = -0.6$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. חישבו את $\sin 2\alpha$.

◀ נשתמש בנוסחה (1):

$$\sin 2\alpha = 2\cdot(-0.6)\cdot\cos\alpha = -1.2\cos\alpha$$

כיוון ש- α נמצאת ברביע השלישי מסיקים כי $\cos\alpha < 0$.

לכן: $$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0.36} = -0.8$$

מציבים בביטוי הקודם ומקבלים סופית:

$$\sin 2\alpha = -1.2\cdot(-0.8) = 0.96 \qquad \triangleright$$

אם נציב $\beta = \alpha$ בנוסחה לקוסינוס של סכום, נקבל נוסחה ל**קוסינוס של זווית כפולה**:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

לכן: $$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \qquad (2)$$

דוגמה 2 נתון: $\cos\alpha = 0.3$. חשבו את $\cos 2\alpha$.

◀ נשתמש בנוסחה (2):

$$\underline{\cos 2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \underline{2\cos^2\alpha - 1} =$$

$$= 2\cdot 0.3^2 - 1 = -0.82 \qquad \triangleleft$$

דוגמה 3 פשטו ביטוי: $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

◀ נשתמש בנוסחאות (1) ו- (2):

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \frac{1}{2}\tan 2\alpha$$

דוגמה 4 נתון: $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. חשבו את $\tan 2\alpha$.

◀ נציב בנוסחה לטנגנס של סכום $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ את $\beta = \alpha$

ונקבל נוסחה **לטנגנס של זווית כפולה**:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (3)$$

נציב את $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ונקבל תשובה:

$$\triangleleft \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

תרגילים

חשבו ללא שימוש במחשבון:

54. א) $2\sin 15°\cdot\cos 15°$ ב) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$
ג) $\frac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$ ד) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$

55. א) $2\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$ ב) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$
ג) $\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ ד) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

56. א) $2\sin 75°\cdot\cos 75°$ ב) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$
ג) $\frac{6\tan 75°}{1-\tan^2 75°}$ ד) $\frac{\tan^2 22.5° - 1}{\tan 22.5°}$

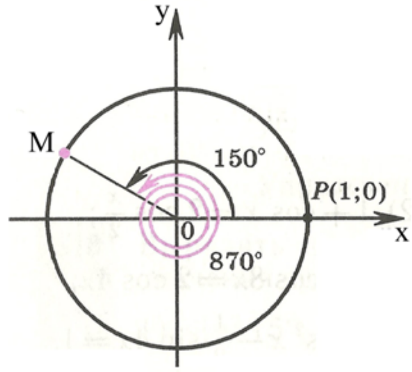
57. חשבו את $\sin 2\alpha$, אם נתון:
א) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ב) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

58. חשבו את $\cos 2\alpha$, אם נתון:
א) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ב) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

59. חשבו את $\tan 2\alpha$, אם נתון: $\tan\alpha = 0.5$.

60. חשבו את $\sin 2\alpha$, אם נתון:
א) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ ב) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$

לזוויות מ- $0°$ עד $90°$ קיימות טבלאות ערכים של סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס.
ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות אחרות מתקבלות מהערכים של הזוויות הללו.

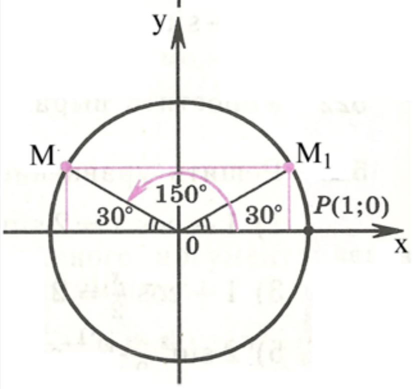


דוגמה 1 חשבו את $\sin 870°$ ו- $\cos 870°$.

נרשום את הזווית כך:

$$870° = 2\cdot360° + 150°.$$

לכן במהלך הסיבוב סביב ראשית הצירים ל- $870°$,
הנקודה $P(1,0)$ תבצע שני סיבובים מלאים ותסתובב
לעוד זווית של $150°$.
כלומר, היא תשוב לאותה הנקודה M, שבה הייתה
לאחר הסיבוב ב- $150°$. לכן:
$\sin 870° = \sin 150°$ ו- $\cos 870° = \cos 150°$.



נבנה נקודה M_1 סימטרית ל- M ביחס לציר y.
שיעורי y לשתי נקודות אלה שווים, ושיעורי x שווים ומנוגדים בסימנם.

לכן: $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$ ▷

במהלך הפתרון השתמשנו בנוסחאות:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin(2\cdot360° + 150°) = \sin 150°, \\ \cos(2\cdot360° + 150°) = -\cos 150°, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sin(180° - 30°) = \sin 30°, \\ \cos(180° - 30°) = -\cos 30°. \end{cases}$$

השוויונות (1) מתקיימות כיוון שסיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $(\alpha + 2\pi k)$
(k מספר שלם) מחזיר אותה למקום שבו הייתה לאחר הסיבוב לזווית α.
במקרה הכללי אפשר לרשום:

$$(3)\quad \sin(\alpha + 360°\cdot k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 360°\cdot k) = \cos\alpha$$

השוויונות (2) הם מקרה פרטי של הנוסחאות:

$$(4)\quad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

הוכחה

נשתמש בנוסחת החיבור לסינוס:

$$\underline{\sin(180° - \alpha)} = \sin180°\cdot\cos\alpha - \cos180°\cdot\sin\alpha = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \underline{\sin\alpha}$$

באופן דומה מוכיחים את הנוסחה השנייה.

שימו לב: כאשר α היא זווית חדה, הזווית $(180° - \alpha)$ נמצאת ברביע השני, שבו ערכי הסינוס חיוביים וערכי הקוסינוס – שליליים.

כאשר הזווית נמצאת ברביע השלישי, מתקיימות הנוסחאות:

$$(5)\quad \sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$$

שימו לב: ברביע השלישי סימני סינוס וקוסינוס שליליים.

ברביע הרביעי, שבו סינוס שלילי וקוסינוס חיובים מתקיים:

$$(6)\quad \sin(270°+\alpha) = -\cos\alpha,\ \cos(270°+\alpha) = \sin\alpha$$

וברביע הראשון, שבו שניהם חיוביים מתקיים:

$$(7)\quad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

כיצד נזכור את הנוסחאות הנ"ל:

א. הסימן באגף ימין של הנוסחה הוא הסימן של אגף שמאל (עבור זווית α חדה).

ב. אם באגף שמאל הזווית $90°\pm\alpha$ או $270°\pm\alpha$, אזי הסינוס הופך לקוסינוס והקוסינוס – לסינוס.

אם הזווית $180° \pm \alpha$, ההחלפה אינה מתרחשת.

דוגמה 2 חשבו את $\sin 930°$.

◄ נשתמש בנוסחה $\sin(\alpha + 360°k) = \sin\alpha$:

$$\sin 930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°)$$

על פי הנוסחה: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ נקבל: $\sin(-150°) = -\sin(150°)$.

על פי נוסחה (4) נקבל סופית:

$$-\sin 150° = -\sin (180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2} \quad \triangleright$$

בדומה לנוסחאות לסינוס וקוסינוס קיימות נוסחאות לזוויות גדולות לטנגנס וקוטנגנס:

$$\tan (\alpha + k\cdot 180°) = \tan \alpha, \ \cot(\alpha + k\cdot 180°) = \cot \alpha$$

$$\tan (90°- \alpha) = \cot \alpha, \cot (90°- \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan (90°+ \alpha) = -\cot \alpha, \cot (90°+ \alpha) = -\tan \alpha$$

הנוסחאות הנ"ל מתקיימות לכל זווית α אפשרויות.

דוגמה 3 חשבו את $\cot 135°$.

◀ נשתמש בנוסחה $\cot (90° + \alpha) = -\tan \alpha$:

$$\cot (135°) = \cot (90° + 45°) = -\tan 45° = -1$$

תרגילים

61. מצאו זווית חדה α שעבורה מתקיים:

א) $\cos 75° = \cos (90° - \alpha)$ ב) $\sin 150° = \sin (90° + \alpha)$

ג) $\sin 150° = \sin (180° - \alpha)$ ד) $\cos 310° = \cos (270° + \alpha)$

62. חשבו באמצעות הנוסחאות לזוויות גדולות:

א) $\cos 150°$ ב) $\sin 135°$ ג) $\cot 135°$ ד) $\cot 120°$

ה) $\cos 225°$ ו) $\sin 210°$ ז) $\cot 240°$ ח) $\sin 315°$

63. א) $\cos 750°$ ב) $\sin 1140°$ ג) $\tan 405°$ ד) $\cot 840°$

64. א) $\cos 630° - \sin 1470° - \cot 1125°$

ב) $\tan 1800° - \sin 495° + \cos 945°$

65. הוכיחו כי סינוס הסכום של שתי זוויות פנימיות של משולש שווה לסינוס הזווית השלישית.

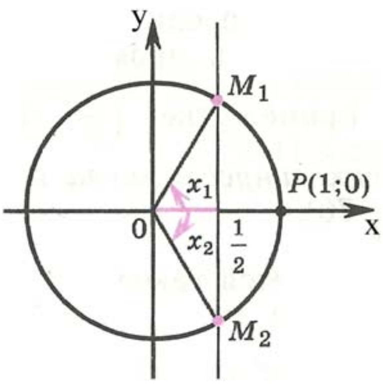
1. המשוואה $\cos x = a$

מהגדרת הקוסינוס נובע כי $-1 \le \cos \alpha \le 1$.

לכן אם $|a| > 1$, אזי למשוואה $\cos x = a$ אין פתרונות.

לדוגמה: למשוואה $\cos x = -1.5$ אין פתרונות.

אם $|a| \le 1$, פותרים את המשוואה לפי הדוגמה הבאה:



דוגמה 1 פתרו את המשוואה $\cos x = \frac{1}{2}$.

- נזכירכם כי $\cos x$ שווה לשיעור x של נקודה על מעגל היחידה שאליה הגיעה הנקודה $P(1,0)$ לאחר סיבוב סביב ראשית הצירים לזווית x.
- בשרטוט רואים כי יש לשתי נקודות של המעגל שיעור x השווה ל- $\frac{1}{2}$, והן: M_1 ו- M_2.

כיוון ש- $\cos 60° = \frac{1}{2}$, מסיקים כי הנקודה M_1 מתקבלת על-ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של $x_1 = 60°$, וגם לכל הזוויות מהסוג $x = 60° + 360°\cdot k$, כאשר $k = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$.

הנקודה M_2 מתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של $x_2 = -60°$ וגם לזוויות מהסוג $-60° + 360°\cdot k$, כאשר $k = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$.

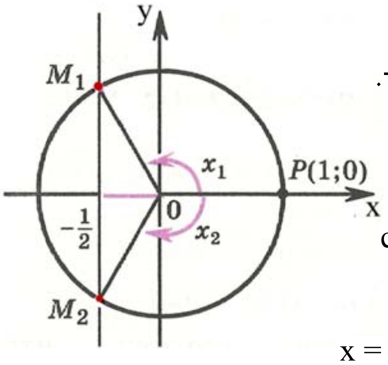
אם כך, כל פתרונות המשוואה $\cos x = \frac{1}{2}$ מתוארים בשתי הנוסחאות:

$x = 60° + 360°\cdot k$, ו- $x = -60° + 360°\cdot k$, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$.

במקום שתי הנוסחאות הללו אפשר לרשום אחת:

$$x = \pm 60° + k\cdot 360° = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k = \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

דוגמה 2 פתרו את המשוואה $\cos x = -\frac{1}{2}$.



◄ לשתי נקודות המעגל, M_1 ו- M_2 שיעור x השווה ל- $-\frac{1}{2}$.

כיוון ש- $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, מסיקים כי $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

ו- $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$. את כל פתרונות המשוואה $\cos x = -\frac{1}{2}$ אפשר לרשום בנוסחה אחת:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$$

לכל אחת מהמשוואות $\cos x = \frac{1}{2}$ ו- $\cos x = -\frac{1}{2}$ אינסוף פתרונות.
בקטע $0 \le x \le \pi$ לכל אחת מהן יש רק שורש אחד: $x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$ הוא שורש המשוואה $\cos x = \frac{1}{2}$, ו- $x_1 = 120° = \frac{2\pi}{3}$ הוא שורש המשוואה $\cos x = -\frac{1}{2}$.

המספר $\frac{\pi}{3} \approx 1.047$ נקרא **ארקקוסינוס** של המספר $\frac{1}{2}$ ורושמים: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$;

המספר $\frac{2\pi}{3} \approx 2.1$ נקרא **ארקקוסינוס** של המספר $\left(-\frac{1}{2}\right)$: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

הגדרה: **ארקקוסינוס** המספר a ($-1 \le a \le 1$) הוא המספר α ($0 \le \alpha \le \pi$), שהקוסינוס שלו שווה ל- a: $\mathbf{\arccos a = \alpha}$, אם $\mathbf{\cos\alpha = a}$ **ו-** $\mathbf{0 \le \alpha \le \pi}$.

דוגמה 3 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, כי $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$;

דוגמה 4 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, כי $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.

את כל פתרונות המשוואה $\cos x = a$, כאשר $|a| \le 1$, אפשר למצוא באמצעות הנוסחה:

$$\mathbf{x = \pm\, arcos\, a + 2\pi k,\ \ k\in Z}$$

דוגמה 5 פתרו את המשוואה $\cos x = -0.75$.

◄ על פי הנוסחה הכללית: $x = \pm\, \text{arcos}\,(-0.75) + 2\pi k,\ \ k\in Z$.

כעת, עלינו לחשב את $\text{arcos}\,(-0.75)$, כלומר למצוא זווית, שהקוסינוס שלה שווה

ל- (0.75-). אולם, זווית זו אינה בין הזוויות המיוחדות, שעבורן ערכי הפונקציות הטריגונומטריות מופיעות בטבלה.

במקרה זה אפשר להיעזר במחשבון ובאמצעות המקש $\cos^{-1}$ לגלות את הערך המקורב של ארקקוסינוס.

הערך שמופיע הוא: 2.4188584. נעגל עד לספרת המאיות ונרשום:

$$\arccos(-0.75) \approx 2.42$$

התשובה הסופית אם כן: $\underline{x = \pm 2.42 + 6.28 \cdot k,\ k \in Z}$ ▷

דוגמה 6 פתרו את המשוואה $(4\cos x - 1)(2\cos 2x + 1) = 0$.

◀ א)

$$4\cos x - 1 = 0,\ \cos x = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$$

ב)

$$2\cos 2x + 1 = 0,\ \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$$

תשובה: $x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$ ▷

אפשר להוכיח כי לכל a, $|a| \le 1$ מתקיים:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

נוסחה זו מאפשרת למצוא את ערכי הארקקוסינוסים של מספרים שליליים באמצעות ערכי הארקקוסינוסים של מספרים חיוביים.

לדוגמה:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

דוגמה 7 פתרו את משוואה $\cos\frac{x}{3} = -1$.

על פי הנוסחה הכללית:

$$\frac{x}{3} = \arccos(-1) + 2\pi n = \pi - \arccos 1 + 2\pi k = \pi + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$x = 3\pi + 6\pi k,\ \ k \in Z$$

תרגילים

.66 חשבו:

א) $\arccos 0$ ב) $\arccos 1$ ג) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

ד) $\arccos\frac{1}{2}$ ה) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ו) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

.67 א) $2\arccos 0 + 3\arccos 1$ ב) $3\arccos(-1) - 2\arccos 0$

ג) $12\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ד) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

פתרו את המשוואות:

.68 א) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ב) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

.69 א) $\cos x = \frac{3}{4}$ ב) $\cos x = -0.3$ ג) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

.70 א) $\cos 4x = 1$ ב) $\cos 2x = -1$ ג) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$

ד) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$ ה) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ד) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

.71 א) $\cos x \cdot \cos 3x = \sin 3x \cdot \sin x$ ב) $\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$

הדרכה: השתמשו בנוסחאות החיבור $(\cos(\alpha + \beta))$.

.72 א) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$ ב) $4\cos^2 x = 3$

ג) $2\cos^2 x = 1 + 2\sin^2 x$ ד) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$

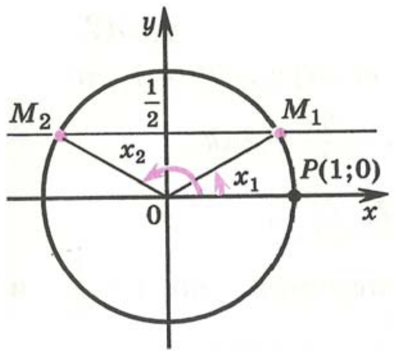
2. המשוואה $\sin x = a$

מהגדרת הסינוס נובע כי $-1 \le \sin\alpha \le 1$.

לכן אם $|a| > 1$, אזי למשוואה $\sin x = a$ אין פתרונות.

לדוגמה: למשוואה $\sin x = 2$ אין פתרונות.

אחרת – פותרים את המשוואה לפי הדוגמה שלהלן:



דוגמה 8 פתרו את המשוואה $\sin x = \frac{1}{2}$.

◄ נזכירכם כי $\sin x$ שווה לשיעור y של נקודה על מעגל יחידה שאליה הגיעה הנקודה $P(1,0)$ לאחר הסיבוב סביב ראשית הצירים לזווית x.

בשרטוט רואים כי יש לשתי נקודות של המעגל שיעור y השווה ל- $\frac{1}{2}$ והן: M_1 ו- M_2.

כיוון ש- $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, מסיקים כי הנקודה M_1 מתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של $x_1 = \frac{\pi}{6}$, וגם לזוויות מהסוג $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k = \pm1, \pm2, ...$.

הנקודה M_2 מתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ וגם לזוויות מהסוג $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, כלומר לזוויות $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, כאשר $k \in Z$.

לפיכך, כל פתרונות המשוואה $\sin x = \frac{1}{2}$ מתוארות, למעשה, על יד שתי הנוסחאות:

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ו- $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, כאשר $k \in Z$.

את שתי הנוסחאות הללו אפשר לאחד בנוסחה אחת: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$.

נבדוק זאת:

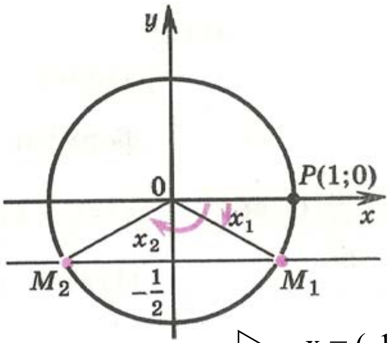
אם n מספר זוגי, כלומר $n = 2k$, אז $(-1)^n = (-1)^{2k} = 1$, ומקבלים נוסחה ראשונה:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ואם n מספר אי זוגי, כלומר $n = 2k + 1$, נקבל נוסחה שנייה:

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

תשובה: $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$

דוגמה 9 פתרו את המשוואה $\sin x = -\frac{1}{2}$.



◀ יש לשתי נקודות של המעגל שיעור y השווה ל- $-\frac{1}{2}$,
M_1 ו- M_2, כאשר $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$.
לכן, את כל פתרונות המשוואה $\sin x = -\frac{1}{2}$
אפשר למצוא באמצעות שתי הנוסחאות:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$$

וגם אותן אפשר לאחד באחת: $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z$. ▷

לכל אחת מהמשוואות $\sin x = \frac{1}{2}$ ו- $\sin x = -\frac{1}{2}$ אינסוף פתרונות.

בקטע $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ לכל אחת מהן יש רק שורש אחד: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ הוא שורש המשוואה $\sin x = \frac{1}{2}$, ו- $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ הוא שורש המשוואה $\sin x = -\frac{1}{2}$.

המספר $\frac{\pi}{6}$ נקרא **ארקסינוס** של המספר $\frac{1}{2}$ ורושמים אותו: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;

המספר $-\frac{\pi}{6}$ נקרא **ארקסינוס** של המספר $\left(-\frac{1}{2}\right)$: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

במקרה הכללי: ארקסינוס המספר a ($-1 \le a \le 1$) הוא המספר α $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ שסינוס שלו שווה ל- a: **$\arcsin a = \alpha$, אם $\sin \alpha = a$.**

לדוגמה: $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, כי $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ו- $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$;
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, כי $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ו- $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

בדומה לפתרון הדוגמאות 1 ו- 2 כך גם פתרונות המשוואה $\sin x = a$,

כאשר $|a| \le 1$ מתקבלים על ידי הנוסחה: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.

דוגמה 10 פתרו את המשוואה $\sin x = \frac{2}{3}$.

◀ על פי הנוסחה: $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$.
כדי למצוא את $\arcsin \frac{2}{3}$ צריך להשתמש במחשבון (או תוכנה לחישוב פונקציות טריגונומטריות). הקישו במקש $\sin^{-1}$ וקבלו: $\arcsin \frac{2}{3} = 0.72972769$.
מעגלים לספרת המאיות ומקבלים: $\arcsin \frac{2}{3} \approx 0.73$.

דוגמה 11 פתרו את המשוואה: $(3\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 0$

א) $3\sin x - 1 = 0,\ \sin x = \frac{1}{3},\ x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$

ב) $2\sin 2x + 1 = 0,\ \sin 2x = -\frac{1}{2},\ 2x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},\ 2x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

תשובה: $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

אפשר להוכיח כי לכל a, $-1 \le a \le 1$, מתקיים:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

נוסחה זו מאפשרת לחשב את ערכי הארקסינוס למספרים שליליים.

דוגמאות:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

תרגילים

חשבו:

73. א) $\arcsin 0$ ב) $\arcsin 1$ ג) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

ד) $\arcsin\frac{1}{2}$ ה) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ו) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

74. א) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ ב) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ג) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

פתרו את המשוואות:

75. א) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ב) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

76. א) $\sin x = \frac{2}{7}$ ב) $\sin x = -\frac{1}{4}$ ג) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

77. א) $\sin 3x = 1$ ב) $\sin 2x = -1$ ג) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$

ד) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ ה) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ ו) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

78. א) $\sin 4x \cos 2x = \cos 4x \sin 2x$ ב) $\cos 2x \sin 3x = \sin 2x \cos 3x$

הדרכה : היעזרו בנוסחאות לסינוס של סכום או של הפרש שתי זוויות.

79. א) $1 - 4\sin x \cos x = 0$ ב) $\sqrt{3} + 4\sin x \cdot \cos x = 0$

ג) $1 + 6\sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4} = 0$ ד) $1 - 8\sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3} = 0$

הדרכה : היעזרו בנוסחאות לסינוס של זווית כפולה

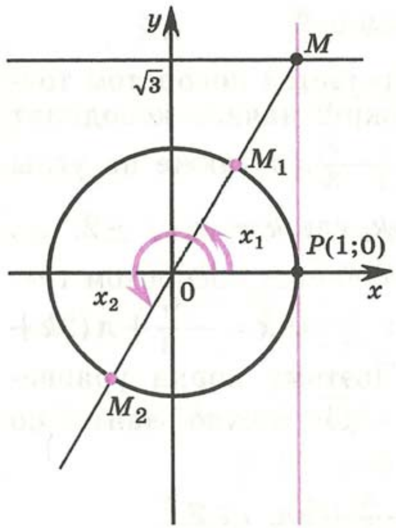
80. א) $(4\sin x - 3)(2\sin x + 1) = 0$ ב) $(4\sin 3x - 1)(2\sin x + 3) = 0$

81. פתרו את המשוואה בעזרת מחשבון :

א) $\sin x = 0.65$ ב) $\sin x = -0.31$

3. המשוואה $\tan x = a$

מהגדרת הטנגנס נובע כי $\tan x$ יכול לקבל ערך כלשהו, לכן למשוואה $\tan x = a$ יש שורשים עבור כל ערך של a.



דוגמה 12 פתרו את המשוואה $\tan x = \sqrt{3}$.

◄ נבנה זוויות שהטנגנס שלהן שווה ל- $\sqrt{3}$.

לשם כך נעביר דרך הנקודה P אנך ל- PO, ונקצה עליו קטע $PM = \sqrt{3}$; נעביר ישר דרך הנקודות M ו- O.

ישר זה חותך את מעגל היחידה בשתי נקודות נגדיות M_1 ו – M_2. במשולש ישר זווית POM מתקיימים :

$$\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan x_1$$

לכן : $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

כלומר הנקודה M_1 מתקבלת מ- $P(1, 0)$ על ידי סיבוב סביב ראשית הצירים לזווית $\frac{\pi}{3}$, וגם לכל הזוויות מהסוג $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, כאשר $n = \pm1, \pm2, \dots$.

הנקודה M_2 מתקבלת מ- $P(1, 0)$ על-ידי סיבוב סביב ראשית הצירים לזווית

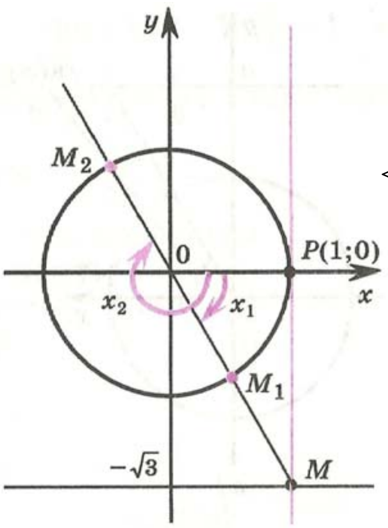
$x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, וגם לכל הזוויות מהסוג $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi n$, כאשר $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

גם את כל שורשי המשוואה $\tan x = \sqrt{3}$ אפשר למצוא באמצעות הנוסחאות:

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ו- $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi n$, כאשר $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

את שתי הנוסחאות האלה אפשר לאחד לנוסחה אחת: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

דוגמה 13 פתרו את המשוואה $\tan x = -\sqrt{3}$.



בדומה לדוגמה הקודמת, נבנה נקודות M_1 ו- M_2 כאלה, ש- $\tan \sphericalangle POM_1 = \tan \sphericalangle POM_2 = -\sqrt{3}$.

מהמשולש ישר הזווית POM מוצאים: $\sphericalangle POM_1 = \frac{\pi}{3}$

כלומר: $x_1 = -\frac{\pi}{3}$.

הנקודה M_1 מתקבלת מ- $P(1, 0)$ על ידי סיבוב סביב ראשית הצירים לזווית $-\frac{\pi}{3}$, וגם לכל הזוויות מהסוג $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, כאשר $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

הנקודה M_2 מתקבלת מ- $P(1, 0)$ על ידי סיבוב סביב ראשית הצירים לזווית $x = -\frac{\pi}{3} + \pi(2n + 1)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

לכן את כל שורשי המשוואה $\tan x = -\sqrt{3}$ אפשר למצוא בעזרת נוסחה אחת:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \qquad \triangleright$$

לסיכום: לכל אחת מהמשוואות $\tan x = \sqrt{3}$ ו- $\tan x = -\sqrt{3}$ יש אינסוף שורשים.

בקטע $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ לכל אחת מהמשוואות יש רק שורש אחד: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ הוא שורש המשוואה $\tan x = \sqrt{3}$, ו- $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ הוא שורש המשוואה $\tan x = -\sqrt{3}$.

למספר $\frac{\pi}{3}$ קוראים ארקטנגנס המספר $\sqrt{3}$ ורושמים: $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

למספר $-\frac{\pi}{3}$ קוראים ארקטנגנס של $-\sqrt{3}$ ורושמים: $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

לכל משוואה מהסוג $\tan x = a$, כאשר a הוא מספר כלשהו, בקטע $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

יש שורש אחד בלבד. כאשר $a \geq 0$, השורש נמצא בתחום $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$,

ואילו כאשר $a < 0$, השורש בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

שורש זה נקרא ארקטנגנס של a, ורושמים: $x = \arctan a$.

הגדרה ארקטנגנס של מספר a הוא המספר α מהתחום $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

שהטנגנס שלו שווה ל- a: $\arctan a = \alpha$, אם $\tan \alpha = a$ ו- $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

לדוגמה:

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, כי $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ ו- $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$;

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, כי $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ו- $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

אפשר להוכיח כי כל שורשי המשוואה $\tan x = a$ מתקבלים באמצעות הנוסחה

$$x = \arctan a + \pi k,\ \ k \in Z$$

דוגמה 14 פתרו את המשוואה $\tan x = 2$.

◀ על פי הנוסחה האחרונה רושמים:

$$x = \arctan 2 + \pi k,\ \ k \in Z$$

את הערך של $\arctan 2$ מוצאים באמצעות המחשבון בהקשה על המקש $\tan^{-1}$:

$\arctan 2 \approx 1.11$. לכן התשובה היא: $x = 1.11 + \pi k,\ \ k \in Z$

כלומר: $x_1 \approx 4.25,\ x_2 \approx 7.39,\ x_3 \approx 9.53, \ldots$ ▷

דוגמה 15 פתרו את משוואה $(\tan x + 4)\left(\cot x - \sqrt{3}\right) = 0$.

◀ א) $\tan x + 4 = 0,\ \tan x = -4$

$$x = \arctan(-4) + \pi k,\ \ k \in Z$$

ב) $\cot x - \sqrt{3} = 0,\ \cot x = \sqrt{3},\ \frac{1}{\tan x} = \sqrt{3},\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$$

אפשר להוכיח כי לכל a מתקיים: $\arctan(-a) = -\arctan a$.

נוסחה זו מאפשרת למצוא את ערכי הארקטנגנס של מספרים שליליים באמצעות ערכי הארקטנגס של מספרים חיוביים.

לדוגמה:

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arctan(-1) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

תרגילים

חשבו:

.82 א) $\arctan 0$ ב) $\arctan(-1)$ ג) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ד) $\arctan\sqrt{3}$

.83 א) $6\arctan\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ב) $2\arctan 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

ג) $5\arctan\left(-\sqrt{3}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

פתרו את המשוואות:

.84 א) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב) $\tan x = \sqrt{3}$ ג) $\tan x = -\sqrt{3}$

ד) $\tan x = -1$ ה) $\tan x = 4$ ו) $\tan x = -5$

.85 א) $\tan 3x = 0$ ב) $1 + \tan\frac{x}{3} = 0$ ג) $\sqrt{3} + \tan\frac{x}{6} = 0$

.86 א) $(\tan x - 1)\left(\tan x + \sqrt{3}\right) = 0$ ב) $\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)\left(\tan x - \sqrt{3}\right) = 0$

ג) $(\tan x - 2)(2\cos x - 1) = 0$ ד) $(\tan x - 4.5)(1 + 2\sin x) = 0$

ה) $(\tan x + 4)\left(\tan\frac{x}{2} - 1\right) = 0$ ו) $\left(\tan\frac{x}{6} + 1\right)(\tan x - 1) = 0$

תשובות (66-86)

.66 א) $\frac{\pi}{2}$ ב) 0 ג) $\frac{\pi}{4}$

ד) $\frac{\pi}{3}$ ה) $\frac{5\pi}{6}$ ו) $\frac{3\pi}{4}$

.67 א) π ב) 2π ג) 0 ד) 8π

68. א) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$ ב) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

ג) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

69. א) $x = \pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

70. ב) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ ד) $x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n,\ n \in Z$

71. ב) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

72. ב) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

73. א) 0 ב) $\frac{\pi}{2}$ ד) $\frac{\pi}{6}$ ו) $-\frac{\pi}{3}$

74. ב) 0 ד) $-\frac{\pi}{2}$

75. ב) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in Z$ ג)

76. א) $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2}{7} + \pi n,\ n\in Z$ ג) $x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} + \pi n,\ n\in Z$

77. ב) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\in Z$ ד) $x = -(-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in Z$

ו) $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n\in Z$

78. ב) $x = \pi n,\ n\in Z$

79. ב) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n\in Z$ ד) $x = (-1)^n \cdot \frac{3}{2} \arcsin\frac{1}{4} + \frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$

80. א) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \pi n,\ n\in Z$

ב) $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{3} \arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi n}{3},\ n\in Z$

81. א) $x \approx (-1)^n \cdot 0.71 + \pi n,\ n\in Z$ ב) $x \approx (-1)^{n+1} \cdot 0.32 + \pi n,\ n\in Z$

82. ב) $-\frac{\pi}{4}$ ד) $\frac{\pi}{3}$

83. ב) 0 ג) $-\frac{47\pi}{12}$

84. ב) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k\in Z$ ד) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k\in Z$ ו) $x = -\arctan 5 + \pi k,\ k\in Z$

85. א) $x = \frac{\pi k}{3},\ k\in Z$

86. ב) $x = \arctan 4.5 + \pi k,\ x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in Z$

ד) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in Z$ ה) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in Z$