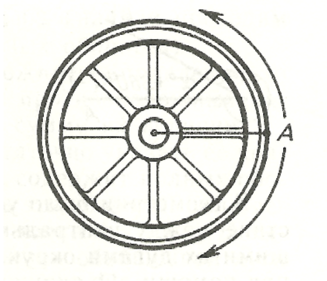
5.1 הרחבת מושג הזווית

בגיאומטריה זווית מוגדרת כ**חלק של מישור** הכלוא בין שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת. לפי הגדרה זו, גודל הזווית יכול לנוע בין 0° ל- 180°.

אפשר להגדיר זווית גם **כמידת הסיבוב**. במקרה זה היא יכולה להיות גדולה מ- 180° ואפילו מ- 360°.



לשם דוגמה נביט בגלגל המסתובב סביב ציר נייח. נניח שאחד מחישורי הגלגל היה אופקי בתחילת הסיבוב. כעבור זמן מה, לאחר שהגלגל יסתובב, חישור זה יהיה במצב היוצר זווית עם הכיוון ההתחלתי.

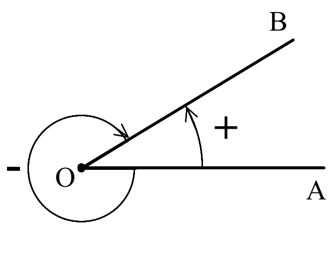
חשוב לדעת לאיזה כיוון הסתובב הגלגל.

לשם כך מצרפים את הסימן "+" או "-" לזווית הסיבוב בהתאם לכיוון הסיבוב. מקובל לסמן סיבוב **נגד כיוון השעון** כחיובי, **ועם כיוון השעון** – כשלילי*.

לאחר שהגלגל ישלים סיבוב מלא, החישור ישוב למקומו ההתחלתי, כלומר יהיה אופקי. ברור, שגודל זווית הסיבוב אינו שווה לאפס, אלא ל- 360°, או -360°.

בהמשך הסיבוב של הגלגל, תיווצרנה זוויות סיבוב שערכן המוחלט גדול מ- 360°.

באופן זה אפשר לבנות כל זווית, לדוגמה $\angle AOB$ על ידי סיבוב הקרן OA עד שתתלכד עם הקרן OB. אם הסיבוב נגד כיוון השעון, הזווית חיובית, ואם הסיבוב בכיוון השעון, הזווית שלילית.



בהמשך נתייחס לכל זווית כאל זווית סיבוב, ונקרא לשוק אחת "התחלתית" ולשנייה "סופית". לדוגמה, בזווית AOB שבשרטוט, השוק OA התחלתית ו- BO סופית.

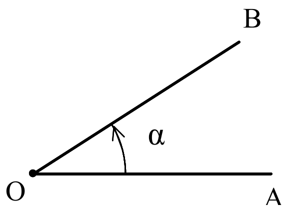
כמה זוויות כאלה קיימות?

תחילה נבדוק זוויות שנוצרו על ידי סיבוב השוק ההתחלתית בכיוון חיובי.

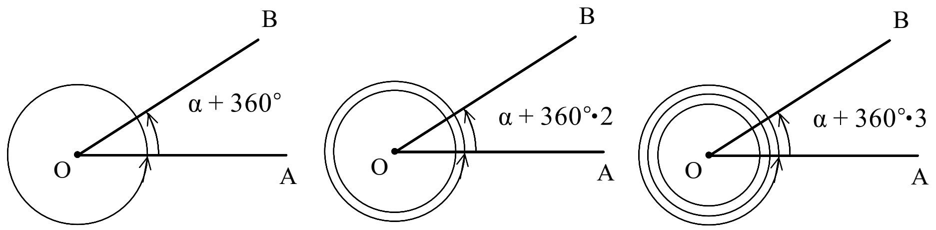
---

*הסכמה זו קשורה לתנועת השמש. שעון מחוגים בנוי כך שמחוגיו נעים באותו כיוון שאנו רואים את תנועת השמש ברקיע. לאחר שקופרניקוס (1473-1543) גילה את תנועת כדור הארץ סביב השמש, התברר שתנועת השמש סביבנו היא אשליה, ולכן קבעו את הסיבוב בכיוון השעון כשלילי.

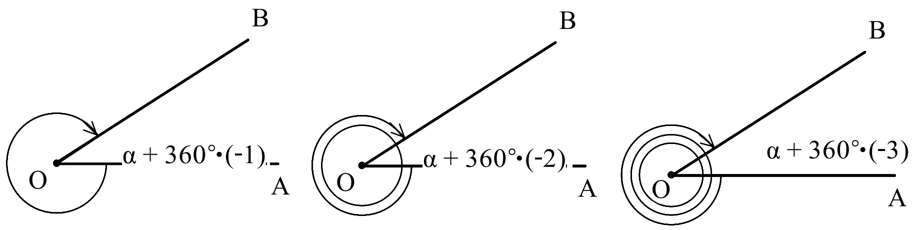
נסמן את גודלה ב- α. אם נמשיך לסובב את השוק OA, היא תתלכד עם השוק הסופית OB פעמים נוספות, כאשר זוויות הסיבוב תהינה:



$$\alpha + 360°,\ \ \alpha + 360°\cdot 2,\ \ \alpha + 360°\cdot 3$$



בדומה לכך, כאשר הקרן OA מסתובבת בכיוון שלילי, ערכי הזוויות שליליים:



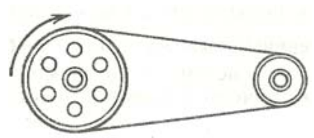
$$-360°+\alpha = \alpha+360°\cdot(-1),\ -360°\cdot 2+\alpha=\alpha+360°\cdot(-2),\ -360°\cdot 3+\alpha=\alpha+360°\cdot(-3)$$

אפשר לראות שכל הזוויות – הן החיוביות והן השליליות – עם שוק התחלתית משותפת OA ושוק סופית משותפת OB מתוארות על ידי נוסחה אחת:

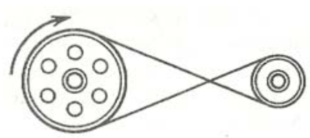
$$\angle AOB = \alpha + 360°\cdot k$$

כאשר k הוא מספר שלם כלשהו, בפרט אם הוא אפס: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

תרגילים



1. באיזה כיוון רואים את סיבוב גלגלי האופניים עוברי אורח העומדים משני צדי הכביש?



2. בשרטוט מסמן החץ את כיוון הסיבוב של אחד המסבים שבתיבת ההילוכים במכונית.
מצאו את כיוון הסיבוב של המסב השני וציינו, איזה מהכיוונים חיובי ואיזה שלילי.

3. מצאו, איזו זווית מכסה מחוג דקות ב:

א. 1 דקה ב. 15 דקות ג. 1 שעה

ד. 2 שעות ו- 25 דקות ה. יממה אחת?

4. מצאו, איזו זווית מכסה מחוג שעות ב:

א. 1 שעה ב. 1 שעה ו- 15 דקות

ג. 1 דקה ד. 3 יממות ו- 20 דקות?

5. שעון מחוגים מראה בדיוק את השעה 12.

כעבור איזה פרק זמן מינימלי המחוגים יתלכדו שוב?

5.2 יחידות זווית

מערכת מדידת זוויות המבוססת על **מעלות** היא הנפוצה ביותר בחיי היום יום*.

יחידת הזווית במערכת זו היא **מעלה,** השווה לזווית המהווה $\frac{1}{360}$ מזווית מלאה (או $\frac{1}{90}$ מזווית ישרה).

במערכת זו יש גם יחידות זווית קטנות יותר: **דקה**, השווה ל- $\frac{1}{60}$ ממעלה: $1' = \frac{1}{60} \cdot 1^\circ$

ושנייה השווה ל- $\frac{1}{60}$ מדקה: $1'' = \frac{1}{60} \cdot 1' = \frac{1}{3600} \cdot 1^\circ$.

מודדים זוויות במעלות באמצעות **מד זווית** ובאמצעות מכשירי מדידה נוספים המיועדים למדידות שאינן דורשות דיוק מרבי.

בתחומי ההנדסה שבהם דרוש דיוק מדידה גבוה יותר, משתמשים במערכת המבוססת על חלוקת המעגל ל- 1000 חלקים. יחידת הזווית במערכת זאת נקראת **אלפית**. באלפיות משתמים גם בצבא (ל**כינון** תותחים).

אולם למערכות המדידה הללו שתי בעיות: הן מתבססות על קביעה **שרירותית** של יחידת הזווית (מדוע לחלק זווית מלאה דווקא ל- 360 חלקים ולא ל- 400 חלקים, למשל?), **ויש קושי לעבור** בין מערכת מדידה אחת לאחרת.

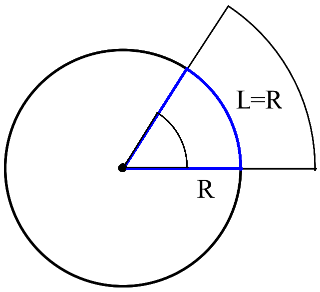
כדי להתגבר על הבעיות הללו משתמשים במערכת "**טבעית**" למדידת זוויות: קובעים את גודל הזווית על ידי היחס בין האורך של **קשת** המעגל, שעליה נשענת זווית מרכזית, לרדיוס המעגל.

יחידת זווית זו נקראת **רדיאן** , והזווית הקטנה ממנה פי אלף – **מילירדיאן**.

מערכות ספירה ומדידה הבנויות על בסיס 60 היו בשימוש עוד בבבל העתיקה, כ- 2000 שנה לפנה"ס.

ביחידת זווית זו משתמשים בפיזיקה, במתמטיקה, באופטיקה, בהנדסה עדינה ועוד*.

רדיאן אחד הוא זווית מרכזית הנשענת על הקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.



כיוון שאורך הקשת של מעגל שלם (היקף מעגל) ורדיוס מעגל קשורים באמצעות הנוסחה $L = 2\pi R$

מסיקים כי זווית של $360°$ שווה ל- $\frac{L}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$

רדיאן: $$360° = 2\pi \text{ rad} \qquad (1)$$

לכן רדיאן אחד שווה ל: $$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \qquad (2)$$

אם נציב במקום π את ערכו (המקורב) נקבל: $$1 \text{ rad} = \frac{180°}{3.14} \approx 57.3° \qquad (3)$$

מנוסחה (1) מקבלים גם הקשר הפוך: $$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad (4)$$

באמצעות שתי הנוסחאות (3) ו- (4) אפשר להמיר את גודל הזווית ממעלות לרדיאנים והפוך. אם נתונה זווית A שגודלה במעלות הוא $A = \alpha°$, נמצא באמצעות נוסחה (4) את גודלה ברדיאנים:

$$\alpha° = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ rad} \qquad (5)$$

ואם נתונה זווית A שגודלה ברדיאנים הוא $A = \alpha \text{ rad}$, אזי גודלה במעלות הוא:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha° \qquad (6)$$

הערה בדרך כלל, ברישום הזווית ברדיאנים משמיטים את היחידות (rad).

למשל, במקום $90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ רושמים פשוט: $90° = \frac{\pi}{2}$.

דוגמה 1

מצאו את גודל הזווית ברדיאנים אם ידוע גודלה במעלות: א) $45°$ ב) $15°$.

א. על פי נוסחה (5) מקבלים:

$$45° = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4}$$

ב. $$15° = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{\pi}{12}$$

*לדוגמה: זווית "התבדרות" של קרן לייזר היא כ- 1 מילירדיאן.

דוגמה 2

מצאו את גודל הזווית במעלות אם ידוע גודלה ברדיאנים:

א) π ב) $\frac{\pi}{2}$ ג) $\frac{3\pi}{4}$.

◀ על פי נוסחה (6) מקבלים:

א) $\pi \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \cdot \pi = 180°$

ב) $\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°$

ג) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135°$

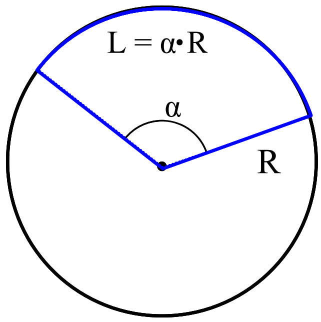
להלן טבלת הזוויות הנפוצות במעלות וברדיאנים:

מעלות	0	30	45	60	90	180	270	360
רדיאנים	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

יישומים בגאומטריה

ייצוג הזוויות ברדיאנים מאפשר רישום פשוט של נוסחאות לאורך הקשת ושטח הגזרה במעגל: גודל ברדיאנים של זווית מרכזית במעגל שווה ליחס של אורך הקשת שעליה הזווית נשענת לרדיוס המעגל:

$$\alpha = \frac{L}{R} \text{(rad)}$$



מכאן מקבלים את הנוסחה לאורך הקשת:

$$L = \alpha \cdot R \qquad (7)$$

שטח של עיגול הוא $S = \pi \cdot R^2$. עיגול מכסה זווית של 2π רדיאן.

לכן שטח הגזרה בעלת זווית של 1 רדיאן הוא $\frac{S}{2\pi} = \frac{R^2}{2}$,

ושטח הגזרה בעלת זווית של α רדיאן:

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha \qquad (8)$$

תרגילים

6. מצאו את הזווית ברדיאנים :

א. $40°$ ב. $120°$ ג. $150°$ ד. $75°$ ה. $32°$ ו. $140°$

7. נתונה זווית ברדיאנים. מצאו את גודלה במעלות :

א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{9}$ ג. $\frac{3\pi}{4}$ ד. 2 ה. 3 ו. 0.36

8. רשמו את הזוויות של הצורות הבאות ברדיאנים :

א. משולש שווה צלעות ב. משולש ישר זווית שווה שוקיים

ג. ריבוע ד. משושה משוכלל

9. מצאו את רדיוס המעגל שבו קשת באורך של 0.36 מ׳ כלואה בזווית מרכזית של 0.9 רדיאן?

10. זווית מרכזית במעגל בעל רדיוס של 1.5 ס״מ נשענת על קשת שאורכה 3 ס״מ. מצאו את גודל הזווית ברדיאנים.

11. לגזרה מעגלית רדיוס של 1 ס״מ וזווית של $\frac{3\pi}{4}$ רדיאן.
מצאו את שטח הגזרה.

12. רדיוס המעגל הוא 2.5 ס״מ ושטח הגזרה 6.25 במ״ר.
מצאו את זווית הגזרה.

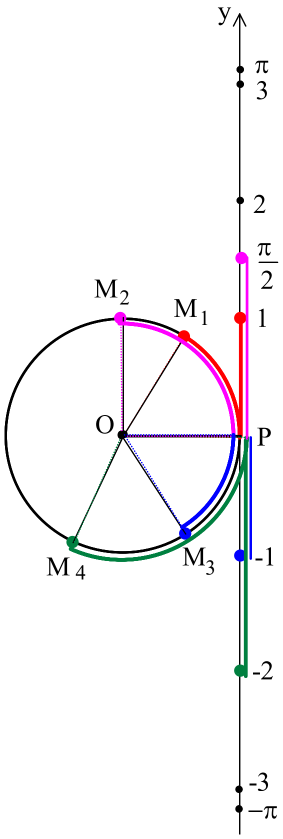
13. חישור של גלגל מסתובב נגד כיוון השעון, כך שכל שנייה הוא מכסה זווית של 1 רדיאן (המהירות הזוויתית שלו היא 1 רדיאן/שנייה).

בתחילת התנועה ($t = 0$) היה קצהו של החישור בנקודה A.

איפה יהיה קצה החישור ברגע של: א) $\frac{\pi}{4}$ שניות? ב) $\frac{\pi}{2}$ שניות? ג) $\frac{2\pi}{3}$ שניות?

איפה היה קצה החישור ברגע של: א) $-\frac{\pi}{4}$ שניות? ב) $-\frac{\pi}{2}$ שניות? ג) $-\frac{2\pi}{3}$ שניות?

5.3 מעגל יחידה



נדמיין גלגל בעל רדיוס $R = 1$ שמסתובב במישור אנכי סביב ציר העובר דרך מרכז המעגל O.

כל נקודה על חישוק הגלגל עוברת במהלך התנועה מרחק מסוים מנקודה P, שאותה נגדיר כנקודת מוצא.

נסמן את הנקודות השונות שדרכן עברה נקודה p במהלך הסיבוב הראשון ב- M_1, M_2, M_3 ו- M_4.

אפשר לאפיין את הנקודות האלה באמצעות הזווית בין הרדיוסים OM_i $(i = 1,2,3,4)$ לבין הכיוון האופקי OP.

אולם הגיוני יותר לאפיין באמצעות הדרך שהנקודה p עברה מתחילת התנועה, כלומר באמצעות אורך הקשת PM_i.

ניצור "כלי למדידת אורך של קשת" באופן הבא: נמתח חוט לאורך הישר המשיק לגלגל בנקודה P, ונסמן עליו מספרים, כמו בסרגל רגיל. כעת, "נלפף" את החוט סביב הגלגל עד לקצה הקשת M_i שאת אורכה צריך למדוד. האורך של קטע החוט שווה לאורך הקשת. כעת ניישר את החוט לאורך הישר ונמדוד את המרחק PM_i.

באופן זה אפשר להתאים לכל נקודה על חישוק הגלגל את הנקודה המתאימה על ציר המספרים, Py, וגם להיפך: לכל נקודה על ישר המספרים מתאימה נקודה על הגלגל.

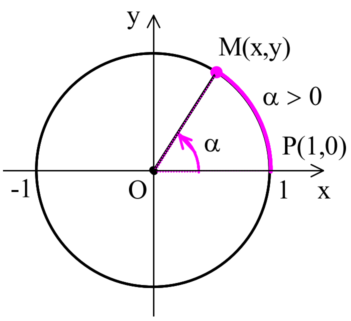
שימו לב:

א. אפשר להגיע לכל נקודה על ידי "ליפוף" בכיוון השעון (כמו שמסומן עבור הנקודות M_1 ו- M_2). במקרה זה הנקודות המתאימות על ציר המספרים יופיעו עם סימן "+", או על ידי ליפוף נגד כיוון השעון (כפי שמסומן עבור הנקודות M_3 ו- M_4). ובמקרה זה הנקודות המתאימות על ציר המספרים יופיעו עם סימן "-".

לדוגמה: לנקודה M_3 מתאים מספר 1- (אם מלפפים בכיוון השעון) או $2\pi-1\approx5.28$ (אם מלפפים נגד כיוון השעון).

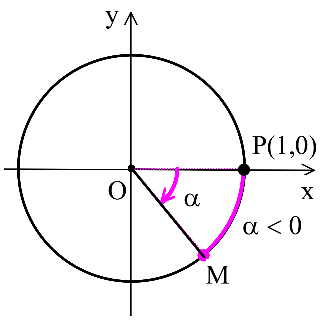
ב. כיוון שלנקודה M_1 מתאים מספר 1 על ציר המספרים, הזווית POM_1 משמשת כיחידת זווית טבעית, ויחסית עליה נמדדות זוויות אחרות.

כפי שלמדנו בסעיף הקודם, זווית מרכזית הנשענת על קשת שאורכה שווה לרדיוס נקראת רדיאן, לכן מסיקים כי לנקודות המסומנות M_1, M_2, M_3 ו-M_4 מתאימות הזוויות של 1, $\frac{\pi}{2}$, 1- ו- 2- רדיאן בהתאמה.

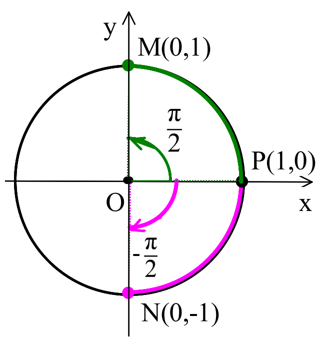


מלבד המיקום הזוויתי של נקודה על חישוק הגלגל חשובים גם הגובה y מעל הציר האופקי וההתרחקות האופקית x מנקודות המוצא P.

משום כך, נוח להציג את מיקום הנקודה המבצעת תנועה מעגלית במעגל היחידה, מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית מערכת צירים ישרה.



גם אם הנקודה M נייחת ומקומה אינו משתנה, אומרים שהיא התקבלה על ידי סיבוב הנקודה P סביב ראשית הצירים O לזווית α. כאשר $\alpha < 0$, הסיבוב בכיוון השעון. סיבוב לזווית של 0 רדיאן מתאר נקודה הנמצאת בנקודת המוצא P ללא תנועה.



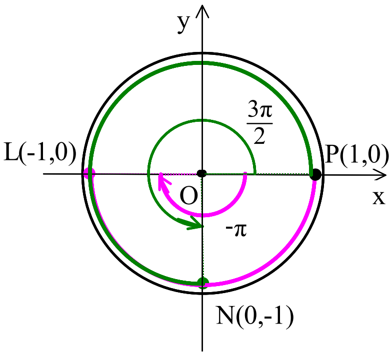
דוגמאות

א. סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $\frac{\pi}{2}$ רדיאן מעביר אותה לנקודה $M(0,1)$.

ב. סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $-\frac{\pi}{2}$ רדיאן מעביר אותה לנקודה $N(0,-1)$.

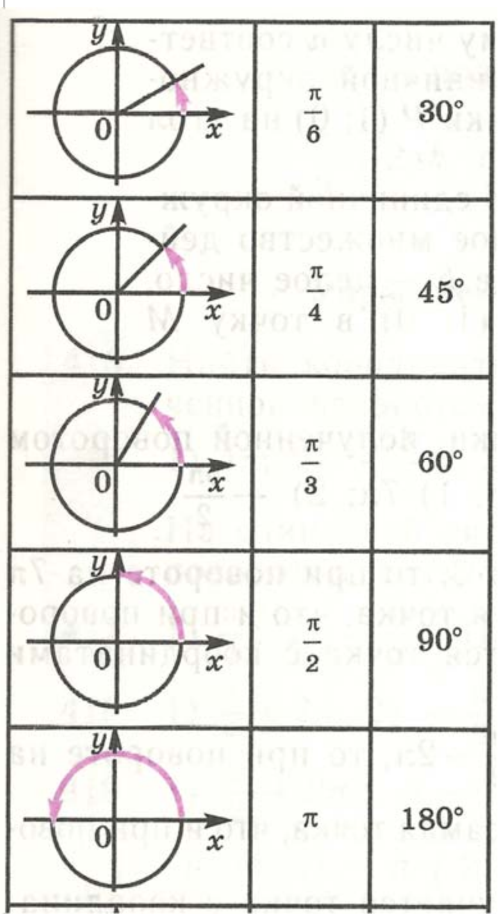
ג. סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $\frac{3\pi}{2}$ רדיאן מעביר אותה לנקודה $N(0,-1)$.

ד. סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $-\pi$ רדיאן מעביר אותה לנקודה $L(-1,0)$.



בגיאומטריה, על פי הגדרת הזווית כחלק השטח הכלוא בין שתי קרני הזווית, ערכי זוויות היו בתחום בין 0 ל- $360°$. כאשר מדובר בסיבוב נקודה במעגל היחידה סביב ראשית הצירים, יש צורך בזוויות גדולות מ- $360°$ ואף שליליות.

את זווית הסיבוב אפשר למדוד במעלות או ברדיאנים.



לדוגמה, סיבוב נקודה לזווית של $\frac{3\pi}{2}$ רדיאנים מסמן את אותה הפעולה כמו סיבוב ל- $270°$; סיבוב ל- $-\frac{\pi}{2}$ רדיאנים שווה לסיבוב ל- $-90°$.

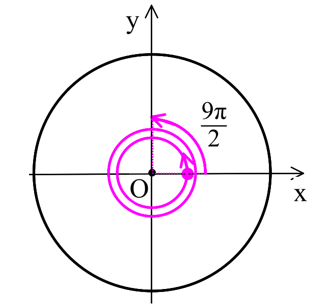
בטבלה משמאל מופיעים סיבובים למספר זוויות מיוחדות.

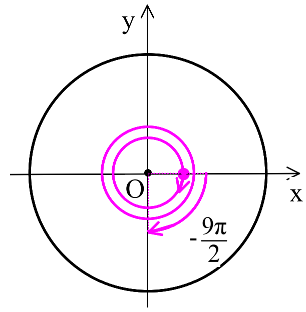
יש לציין שלאחר הסיבוב ל- 2π רדיאן $(360°)$ ול- -2π $(-360°)$, הנקודה חוזרת למקומה התחלתי.

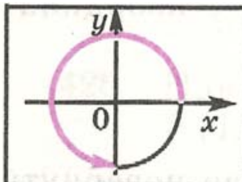
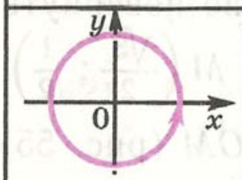
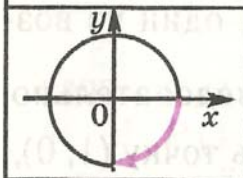
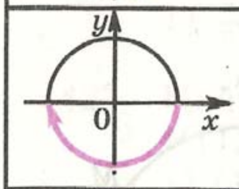
נבדוק כעת את הסיבובים לזוויות גדולות מ- 2π וקטנות מ- -2π:

כך, בסיבוב לזווית של $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$ רדיאן הנקודה מבצעת שני סיבובים מלאים נגד כיוון השעון ועוד זווית של $\frac{\pi}{2}$ רדיאן.

סיבוב לזווית של $-\frac{9\pi}{2} = -2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ רדיאן שקול לשני סיבובים מלאים בכיוון השעון ועוד סיבוב לזווית של $\frac{\pi}{2}$ רדיאן באותו הכיוון.





	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	−90°
	$-\pi$	−180°

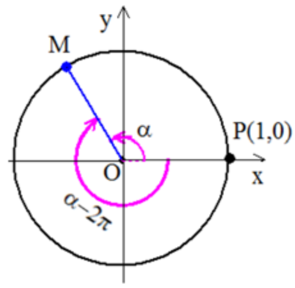
שימו לב : סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של $\frac{9\pi}{2}$ רדיאן מביא אותה ל אותו מקום כמו בסיבוב לזווית של $\frac{\pi}{2}$, וסיבוב לזווית של $-\frac{9\pi}{2}$ שקול לסיבוב ל- $-\frac{\pi}{2}$.

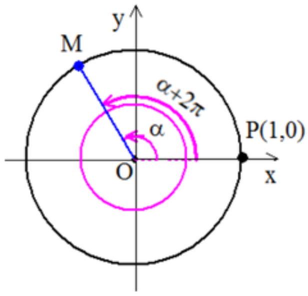
אפשר להסיק איפוא, שאם $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, כאשר k הוא מספר שלם,

הסיבוב לזווית α שקול לסיבוב לזווית α_0.

לכל מספר ממשי α מתאימה נקודה אחת על מעגל היחידה, המתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית של α רדיאן.

לעומת זאת, לאותה נקודה M על מעגל היחידה מתאימים אינסוף מספרים ממשיים מסוג $\alpha + 2\pi k$ (k - מספר שלם כלשהו), אשר מגדירים את מעבר הנקודה $P(1,0)$ לנקודה M.





דוגמה

מצאו את שיעורי הנקודה המתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית:

א. 7π ב. $-\frac{5\pi}{2}$

◀ א. כיוון ש- $7\pi = \pi + 3\cdot 2\pi$ מסיקים שלאחר הסיבוב ל- 7π מתקבלת אותה הנקודה המתקבלת לאחר הסיבוב ל- π, כלומר הנקודה ששיעוריה $(-1,0)$.

ב. כיוון ש- $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$, מסיקים שלאחר הסיבוב ל- $-\frac{5\pi}{2}$ מתקבלת אותה הנקודה המתקבלת לאחר הסיבוב ל- $-\frac{\pi}{2}$, כלומר הנקודה ששיעוריה $(0, -1)$.

תרגילים

14. מצאו את שיעורי הנקודה על מעגל היחידה, שהתקבלה בסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזווית:

א. 4π ב. $-\frac{3}{2}\pi$ ג. -6.5π ד. 3π ה. $-\pi$

סמנו על מעגל היחידה נקודה המתקבלת בסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזווית נתונה:

15. א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{3}$ ג. $-\frac{3}{4}\pi$ ד. $\frac{4\pi}{3}$ ה. $-\frac{5}{4}\pi$ ו. $-225°$

16. א. $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$ ב. $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$ ג. $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$ ד. $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$

17. א. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, k – מספר שלם ב. $-\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, k – מספר שלם
ג. $-\pi + 2\pi k$, k – מספר שלם ד. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k – מספר שלם

18. מצאו את שיעורי הנקודה המתקבלת בסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזווית:

א. 3π ב. $-\frac{7}{2}\pi$ ג. $-\frac{15}{2}\pi$ ד. 5π ה. $540°$ ו. $810°$

מצאו את שיעורי הנקודה המתקבלת בסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזווית הבאה (k – מספר שלם):

19. א. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ב. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ג. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ד. $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

20. א. $\frac{\pi}{2} \pm \pi k$ ב. $\frac{\pi}{4} \pm \pi k$ ג. $-\frac{3\pi}{2} + \pi k$ ד. $-\pi + \pi k$

21. רשמו את כל הזוויות שעבורן יש לסובב את הנקודה $P(1,0)$ כדי להעביר אותה לנקודה ששיעוריה הם:

א. $(1, 0)$ ב. $(-1, 0)$ ג) $(0, 1)$ ד) $(0, -1)$

22. באיזה רביע נמצאת נקודה שהתקבלה מהנקודה $P(1, 0)$ בסיבוב לזווית:

א. 1 ב. 2.75 ג. 3.16 ד. 4.95 ?

23. מצאו מספר x $(0 \le x \le 2\pi)$ ומספר טבעי k שעבורן יתקיים השוויון $a = x + 2\pi k$, אם נתון:

א. $a = 9.8\pi$ ב. $a = 7\frac{1}{3}\pi$ ג. $a = \frac{11}{2}\pi$ ד. $a = \frac{17}{3}\pi$

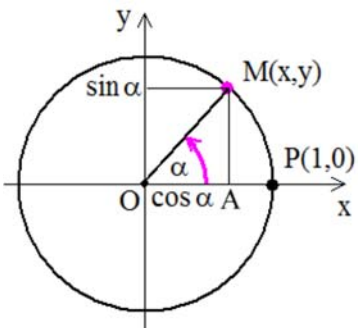
24. סמנו על מעגל היחידה נקודה המתקבלת בסיבוב הנקודה $P(1, 0)$ לזווית נתונה:

א. 4.5π ב. 5.5π ג. -6π ד. -7π

25. מצאו את שיעורי הנקודה המתקבלת בסיבוב הנקודה $P(1, 0)$ לזווית הבאה (k – מספר שלם):

א. $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ב. $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$ ג. $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$ ד. $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$

5.4 סינוס וקוסינוס



בתנועת הנקודה על מעגל, חשוב לא רק מקומה הזוויתי (המבוטא בזווית בין **רדיוס-וקטור** OM לבין הציר האופקי), אלא גם "הגובה" של הנקודה מעל ציר זה (שיעורי y במערכת צירים ישרה) וההתרחקות האופקית של הנקודה ממרכז הסיבוב O (שיעור x).

כאשר הנקודה M נמצאת ברביע הראשון של מערכת הצירים $(0 < \alpha < 90°)$, שיעורי x ו- y מהווים למעשה ניצבים של משולש ישר זווית OAM: הניצב AM (שיעור y) נמצא מול זווית O, והניצב AO (שיעור x) נמצא ליד זווית O. על פי הגדרות של סינוס וקוסינוס במשולש ישר זווית:

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OM}, \cos\alpha = \frac{AO}{OM}$$

כיוון שבמעגל היחידה רדיוס המעגל הוא 1: $OM = R = 1$,

מקבלים: $\sin\alpha = AM = y,\ \cos\alpha = x$

כלומר: סינוס זווית α שווה לשיעור y של נקודה שהתקבלה על ידי סיבוב הנקודה (1,0) סביב ראשית הצירים לזווית α, וקוסינוס זווית α שווה לשיעור x של נקודה שהתקבלה על ידי סיבוב הנקודה (1,0) סביב ראשית הצירים לזווית α.

הגדרה זאת אומנם נגזרה מההגדרות של סינוס וקוסינוס במשולש ישר זווית (כאשר $0 < \alpha < 90°$), אך הגיוני **להרחיב אותה** גם לזוויות סיבוב גדולות יותר (שהרי בתנועה מעגלית נקודה אינה עוצרות דווקא למעלה, אלא ממשיכה בתנועתה גם לזוויות גדולות אף מ- $360°$!).

דוגמה 1 סיבוב הנקודה (1,0) לזווית $\frac{\pi}{2}$ ($90°$) מעביר אותה לנקודה (0,1).

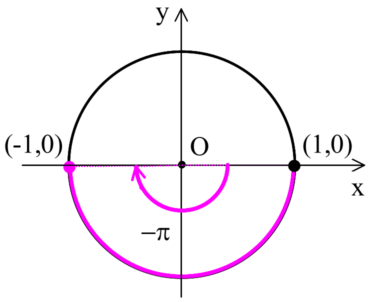
שיעור x של נקודה זו הוא 0, שיעור y הוא 1, לכן מקבלים:

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1,\ \ \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$$

דוגמה 2

מצאו את $\sin(-\pi)$ ו- $\cos(-\pi)$.

◀ יש לגלות, לאן תעבור נקודה (1,0) לאחר הסיבוב לזווית של $(-\pi)$ רדיאן:



כפי שאפשר לראות בשרטוט הנקודה היא (-1, 0).

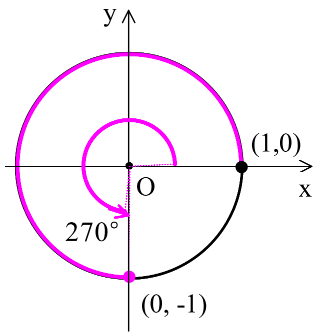
לכן נקבל:

$$\sin(-\pi) = 0,\ \ \cos(-\pi) = -1$$

דוגמה 3

מצאו את $\sin 270°$ ו- $\cos 270°$.

◀ לאחר הסיבוב ל- $270°$ תעבור הנקודה (1,0) לנקודה (0,-1). לכן:

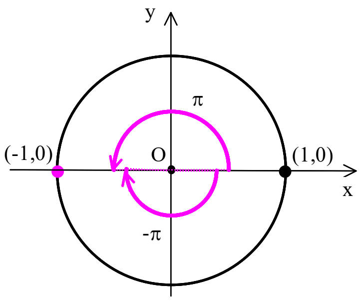


$$\sin 270° = -1,\ \ \cos 270° = 0$$

כיוון שזווית α ברדיאנים היא מספר ממשי, $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$ הם ביטויים מספריים, והביטוי $\sin x = a$ שבו a הוא מספר נתון, מהווה משוואה יחסית ל- x.

דוגמה 4 פתרו משוואה $\sin x = 0$.

◀ פתרון משוואה, משמעו למצוא את כל הזוויות שהסינוס שלהן הוא אפס.



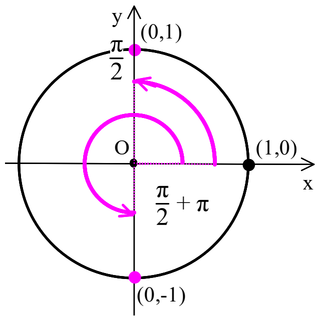
לשתי נקודות על מעגל היחידה יש שיעור y השווה לאפס: $(1, 0)$ ו- $(-1, 0)$. נקודות אלה מתקבלות מסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזוויות $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

וגם לזוויות $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$

כלומר: $\sin x = 0$ כאשר <u>$x = \pi \cdot k$, k – מספר שלם כלשהו</u>.

דוגמה 5 פתרו את המשוואה $\cos x = 0$.

◀ פתרון משוואה זו, משמעו למצוא את כל הנקודות ששיעור x שלהן הוא לאפס.



יש שתי נקודות כאלה: $(0, 1)$ ו- $(0,-1)$ והן מתקבלות מסיבוב הנקודה $(1, 0)$ לזוויות $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots$

וגם לזוויות $\frac{\pi}{2} - \pi$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 3\pi$, …

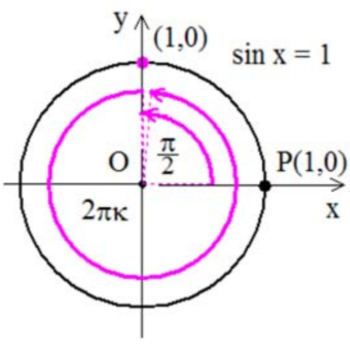
כלומר: $\cos x = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k – מספר שלם כלשהו.

הערה: מסמנים קבוצת מספרים שלמים באות Z. סימן שייכות של מספר לקבוצה מסוימת הוא $\in$. לכן אפשר לרשום את התשובה כך:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \ k \in Z$$

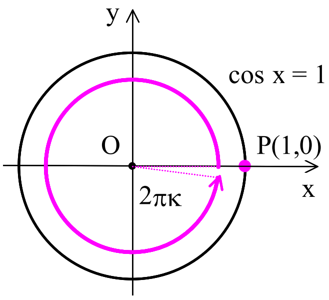
דוגמה 6 פתרו את המשוואות:

א) $\sin x = 1$ ב) $\cos x = 1$.



◀ א. נאתר על מעגל היחידה נקודות, ששיעור y שלהן שווה ל- 1. הראשונה מתקבלת על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית $\frac{\pi}{2}$; לאחר סיבוב נוסף לזווית 2π תתקבל הנקודה השנייה. נקודות אחרות תתקבלנה על ידי סיבובה לזוויות $\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k, \ k \in Z$.

☜ יש, אם כן, אינסוף פתרונות למשוואה $\sin x = 1$.



ב. נאתר על מעגל היחידה נקודות ששיעור x שלהן שווה ל- 1. הראשונה היא הנקודה $P(1,0)$ עצמה (זווית הסיבוב היא $x = 0$); נקודות אחרות תתקבלנה על ידי סיבובים לזוויות $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

תשובות: א. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ ב. $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

☜ **שימו לב: למשוואות טריגונומטריות יש אינסוף פתרונות. בביטוי אלגברי המבטא את קבוצת הפתרונות, אפשר לבצע פעולות אלגבריות באופן רגיל.**

דוגמה 7 פתרו את המשוואה: $\sin 2x = 1$.

◀ על פי דוגמה 6 אפשר לרשום עבור 2x: $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

נחלץ ממשוואה זו את x: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$.

נרשום מספר ערכים של x המהווים פתרון למשוואה:

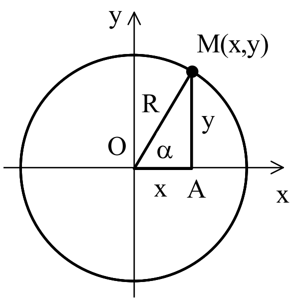
$k = 0$: $x = \frac{\pi}{4}$; $k = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$; $k = 2$: $x = \frac{\pi}{4} + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$ וכו'.

5.5 טנגנס וקוטנגנס

הגדרה

במשולש ישר זווית $(0 < \alpha < 90°)$ מגדירים את היחס בין הניצב שמול הזווית α לניצב שליד הזווית בשם **טנגנס** הזווית:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \qquad (1)$$



כיוון ש- $y = R\cdot\sin\alpha$ ו- $x = R\cdot\cos\alpha$, מקבלים לאחר ההצבה:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{R\cdot\sin\alpha}{R\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

בדומה להגדרות של סינוס וקוסינוס, הגיוני **להרחיב** את ההגדרה של טנגנס לזוויות גדולות מ- $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$.

לדוגמה:

$$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0,\quad \tan\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

אולם:

$$\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} \Rightarrow \infty \ , \ \tan\frac{3\pi}{2} = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}} = \frac{-1}{0} \Rightarrow -\infty$$

כלומר טנגנס אינו מוגדר לזוויות של $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$ ו- $\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$.

לפעמים משתמשים ביחס נוסף בין שיעורי הנקודה על מעגל היחידה:

קוטנגנס הזווית שווה ליחס בין שיעור x לשיעור y, כלומר:

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{R\cdot\cos\alpha}{R\cdot\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

מההגדרות של טנגנס וקוטנגנס מקבלים:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\tan\alpha}\ , \ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$$

לכן בנקודות, שבהן טנגנס אינו מוגדר ערכו של קוטנגנס שווה לאפס:

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot\frac{3\pi}{2} = 0$$

ובנקודות, שבהן טנגנס שווה לאפס קוטנגנס אינו נוגדר (שואף לאיסוף):

$$\cot 0 = \frac{1}{\tan 0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \infty,\ \cot\pi = \frac{1}{\tan\pi} = \frac{1}{0} \Rightarrow \infty$$

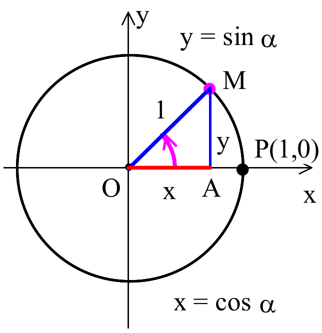
כיוון שערכי סינוס שווים לאפס לכל הזוויות מהסוג $x = \pi\cdot k,\ k\in Z$ (ראו דוגמה 4),

מסיקים שעבור אותן הזוויות $\tan(\pi k) = 0$ וקוטנגנס אינו מוגדר.

בדוגמה 5 ראינו ש- $\cos x = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in Z$, כלומר עבור זוויות אלה

קוטנגנס שווה לאפס: $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ וטנגנס אינו מוגדר.

5.6 סינוס, קוסינוס וטנגנס של זוויות מיוחדות



<u>$\alpha = 45°$</u>

נתבונן במעגל היחידה בשרטוט משמאל: שיעורי הנקודה M על פי ההגדרה: $x = \cos\alpha$ ו- $y = \sin\alpha$, כאשר α היא זווית סיבוב הנקודה ממקומה ההתחלתי $P(1,0)$.

כאשר $(45°)$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$, משולש ישר זווית AOM הוא גם שווה שוקיים: $OA = AM$, כלומר:

$$x = \cos\frac{\pi}{4} = y = \sin\frac{\pi}{4}$$

ממשפט פיתגורס נובע: $x^2 + y^2 = 1$ (נכון לכל זווית α!)

כיוון שעבור $\alpha = \frac{\pi}{4}$ מתקיים $x = y$ נקבל: $2x^2 = 1$.

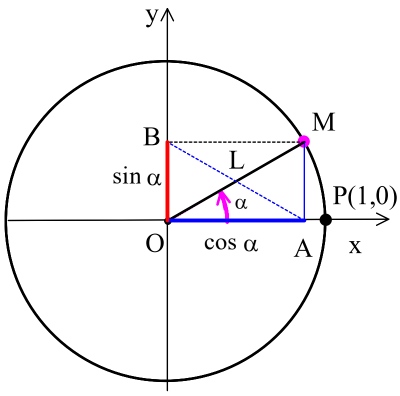
נחלץ x: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. כדי "להיפטר" משורש במכנה, נכפיל מונה ומכנה ב- $\sqrt{2}$:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

התוצאה הסופית היא: $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

כיוון ש- $\cot\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, מקבלים: $\tan\frac{\pi}{4} = 1, \cot\frac{\pi}{4} = 1$

<u>סינוס, קוסינוס וטנגנס של זווית °30</u>



כאשר זווית הסיבוב היא $\frac{\pi}{6} = 30°$, המשולש OAM הוא ישר זווית שאחת מזוויותיו החדות היא $\alpha = 30°$.

כפי שלמדתם בגיאומטריה, במקרה זה, הניצב שמול זווית זו שווה למחצית היתר: $AM = \frac{1}{2}OM$

כיוון ש- $AM = y = \sin\alpha$ ו- $OM = 1$, מקבלים:

$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

כדי לחשב את הניצב השני OA (השווה ל- $\cos\frac{\pi}{6}$) ניעזר במשפט פיתגורס:

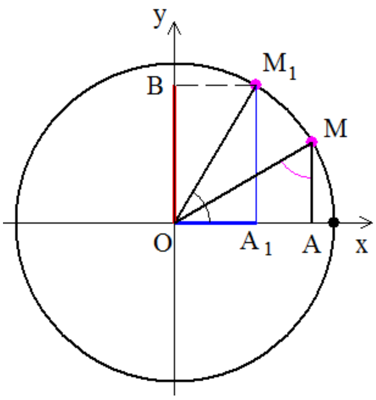
$$OA = \sqrt{1 - AM^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

לכן: $\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

נחלק סינוס בקוסינוס ונקבל ערך של טנגנס: $\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ערכו של קוטנגנס הוא הופכי לערכו של טנגנס: $\cot 30° = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

סינוס, קוסינוס טנגנס וקוטנגנס של זווית $60°$



במשולש ישר זווית OAM שבו $\angle AOM = 30°$,

הזווית החדה השנייה שווה ל- $\angle OMA = 60°$.

לכן משולש ישר זווית A_1OM_1 המייצג את סיבוב הנקודה M לזווית של $60°$, חופף למשולש AOM (על פי יתר ושתי זוויות חדות):

$$\triangle AOM \cong \triangle A_1OM_1$$

מכאן נובע:

$$\underline{\sin 60°} = \sin \angle A_1OM_1 = OB = OA = \underline{\cos 30°}$$

באופן דומה מסיקים כי $\underline{\cos 60° = \sin 30°}$

וגם עבור טנגנס וקוטנגנס:

$$\underline{\tan 60° = \cot 30°, \cot 60° = \tan 30°}$$

שימו לב: את הערכים קיבלנו ללא שימוש במחשבון, אלא בעזרת רישום אלגברי (שורש ריבועי). קל יותר לזכור רישום מעין זה, והוא גם **מדויק** יותר ביחס לרישום במחשבון באמצעות מספרים עשרוניים.

לדוגמה, אם ננסה לחשב את $\sin 60°$ במחשבון, נקבל: $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866025......$

כיוון ש- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ הוא **מספר אי רציונלי**, ברישום העשרוני שלו יש אינסוף ספרות והמחשבון מעגל אותו עד לדיוק הנדרש ומציג את המספר המקורב.

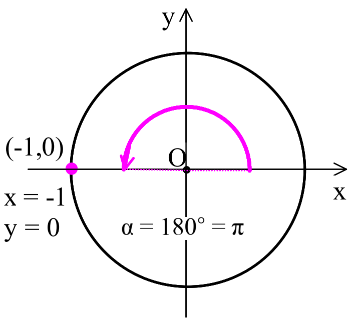
וכך כאשר מבצעים פעולות נוספות בין מספרים מקורבים, שגיאת החישוב גְדֵלה.

לכן בפתרון בעיות עדיף להשתמש ברישום האלגברי ורק בסוף במחשבון.

ניעזר בערכי סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס של זוויות חדות, ונרשום את ערכיהם עבור זוויות מיוחדות בתחום של זווית סיבוב שלמה $(0 < \alpha < 2\pi)$:

2π (360°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	π (180°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	0°	α
0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin\alpha$
1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\alpha$
0	לא מוגדר	0	לא מוגדר	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan\alpha$
לא מוגדר	0	לא מוגדר	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	לא מוגדר	$\cot\alpha$

כדי להבין כיצד התקבלו ערכי הפונקציות עבור זוויות גדולות נתבונן בייצוג הגרפי במעגל היחידה עבור הזוויות של 180° ו- 270°:

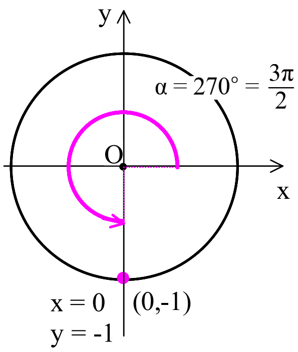


$$\sin\pi = \frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos\pi = \frac{x}{R} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} \Rightarrow -\infty$$



$$\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{y}{R} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\cot\frac{3\pi}{2} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

דוגמה

חִשבו את ערך הביטוי: $4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}$

◄ נשתמש בטבלת הערכים של פונקציות טריגונומטריות ונקבל:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2.5$$

את הערכים של סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס של הזוויות האחרות שאינן מופיעות בטבלה אפשר במקרים מסוימים לחשב במדויק באמצעות הנוסחאות של זווית כפולה, מחצית הזווית, סכום והפרש הזוויות ועוד. בהמשך נלמד לעשות זאת.

במקרים אחרים נחשב את הערכים המקורבים באמצעות מחשבון.

תרגילים

26. בנו על מעגל היחידה את הנקודות המתאימות לזווית α, אם נתון:

א. $\sin\alpha = 1$ ב. $\sin\alpha = 0$ ג. $\cos\alpha = -1$ ד. $\cos\alpha = 0$

ה. $\sin\alpha = -0.6$ ו. $\sin\alpha = 0.5$ ז. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

27. חשבו:

א. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$ ב. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ג. $\sin\pi-\cos\pi$

ד. $\sin 0-\cos 2\pi$ ה. $\sin\pi+\sin 1.5\pi$ ו. $\sin 0+\cos 2\pi$

28. מצאו את הערכים של סינוס וקוסינוס של המספר β, אם נתון:

א. $\beta = 3\pi$ ב. $\beta = 4\pi$ ג. $\beta = 3.5\pi$

ד. $\beta = \frac{5}{2}\pi$ ה. $\beta = \pi k,\ k\in Z$ ו. $\beta = (2k+1)\pi,\ k\in Z$

חשבו את ערכי הביטויים:

29. א. $\sin 3\pi-\cos\frac{3\pi}{2}$ ב. $\cos 0-\cos 3\pi+\cos 3.5\pi$

ג. $\sin\pi k+\cos 2\pi k$, $k\in Z$ ד. $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}-\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, $k\in Z$

30. א. $\tan\pi+\cos\pi$ ב. $\tan 0°-\tan 180°$

ג. $\tan\pi+\sin\pi$ ד. $\cos\pi-\tan 2\pi$

31. א. $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}$ ב. $5\sin\frac{\pi}{4}+3\tan\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\cot\frac{\pi}{4}$

ג. $\left(2\cdot\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{3}$ ד. $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}$

32. פתרו את המשוואות:

א. $2\sin x=0$ ב. $\frac{1}{2}\cos x=0$ ג. $\cos x-1=0$

ד. $1-\sin x=0$ ה. $\sin x=-1$ ו. $\cos x=-1$

ז. $\sin 3x=0$ ח. $\cos 0.5x=0$ ט. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)=1$

5.7 סימני סינוס, קוסינוס וטנגנס

7.1 סימני סינוס וקוסינוס

נניח שנקודה $(1,0)$ מתחילה לנוע על מעגל היחידה נגד כיוון השעון.

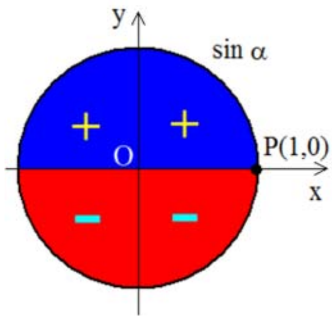
שיעורי x ו- y של כל הנקודות ברביע ראשון של מערכת הצירים חיוביים,

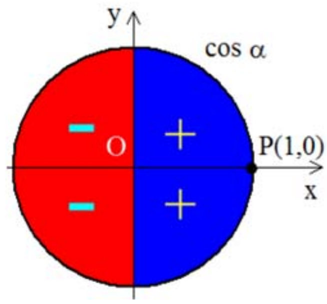
לכן $\sin\alpha=\frac{y}{R}>0$ ו- $\cos\alpha=\frac{x}{R}>0$, כאשר $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

עבור הנקודות ברביע השני, שיעורי y חיוביים ואילו שיעורי x שליליים,

לכן ברביע השני $\sin\alpha>0$ ו- $\cos\alpha<0$. באופן דומה, ברביע השלישי $\sin\alpha<0$ ו- $\cos\alpha<0$, וברביע הרביעי $\sin\alpha>0$ ו- $\cos\alpha<0$.

סמני סינוס וקוסינוס בהמשך התנועה נקבעים לפי הרביע שבו תימצא הנקודה.





דוגמה 1 קבעו את הסימנים של סינוס וקוסינוס של הזווית:

א. $\frac{3\pi}{4}$ ב. $745°$ ג. $-\frac{5\pi}{7}$.

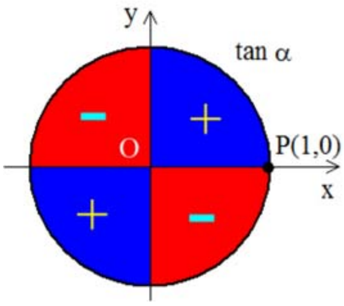
א. לזווית $\frac{3\pi}{4}$ מתאימה הנקודה הנמצאת ברביע השני.

לכן $\sin\frac{3\pi}{4} > 0,\ \cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

ב. כיוון ש- $745° = 2\cdot360° + 25°$, מסיקים שלסיבוב הנקודה $(1,0)$ לזווית $745°$ מתאימה נקודה ברביע הראשון. לכן $\sin 745° > 0$, $\cos 745° > 0$.

ג. כיוון ש- $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, סיבוב הנקודה $(1,0)$ לזווית $-\frac{5\pi}{7}$ מביא אותה לרביע השלישי. לכן:

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0,\ \cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$$



1. סימני טנגנס

על פי ההגדרה, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, לכן $\tan\alpha > 0$
כאשר לסינוס וקוסינוס סימנים זהים, ו- $\tan\alpha > 0$
כאשר לסינוס ולקוסינוס סימנים מנוגדים.

דוגמה 2

מצאו את הסימן של טנגנס הזווית: א. $260°$ ב. 3

א. כיוון ש- $180° < 260° < 270°$ מסיקים שהזווית היא ברביע השלישי, שבו הטנגנס חיובי: $\tan 260° > 0$.

ב. כיוון ש- $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, מסיקים שהזווית ברביע הרביעי שבו הטנגנס שלילי: $\tan 3 < 0$.

תרגילים

33. באיזה רביע נמצאת הנקודה שהתקבלה על ידי סיבוב של נקודה $P(1,0)$ לזווית α, אם נתון:

א. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ב. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ג. $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ ד. $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

ה. $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$ ו. $\alpha = 4.8$ ז. $\alpha = -1.31$ ח. $\alpha = -2.7$?

34. נתון: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. באיזה רביע נמצאת הנקודה שהתקבלה על ידי סיבוב הנקודה $P(1,0)$ לזווית:

א. $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ב. $\pi - \alpha$ ג. $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ ד. $\frac{\pi}{2} + \alpha$ ה. $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ו. $\pi - \alpha$?

35. מצאו סימן של $\sin\alpha$, אם נתון:

א. $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ב. $\alpha = -\frac{33\pi}{7}$ ג. $\alpha = \frac{4}{3}\pi$

ד. $\alpha = -1.1\pi$ ה. $\alpha = 5.1$ ו. $\alpha = -470°$.

36. מצאו סימן של $\cos\alpha$, אם נתון:

א. $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ ב. $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ ג. $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$

ד. $\alpha = 4.6$ ה. $\alpha = -5.3$ ו. $\alpha = -150°$.

37. מצאו סימן של $\tan\alpha$, אם נתון:

א. $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ ב. $\alpha = \frac{12}{5}\pi$ ג. $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$

ד. $\alpha = 3.7$ ה. $\alpha = -1.3$ ו. $\alpha = 283°$.

38. מצאו סימנים של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ו- $\tan\alpha$, אם נתון:

א. $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ב. $\frac{3}{2}\pi < \alpha < \frac{7\pi}{4}$ ג. $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ ד. $2\pi < \alpha < 2.5\pi$

39. מצאו סימנים של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ו- $\tan\alpha$ אם נתון:

א. $\alpha = 1$ ב. $\alpha = 3$ ג. $\alpha = -3.4$ ד. $\alpha = -1.3$

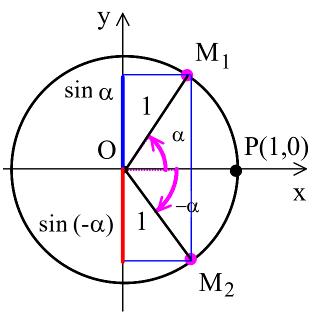
40. מה גדול יותר:

א. $\sin 0.7$ או $\sin 4$? ב. $\cos 1.3$ או $\cos 2.3$?

41. באיזה רביע נמצאת נקודה המתאימה למספר α, אם נתון:

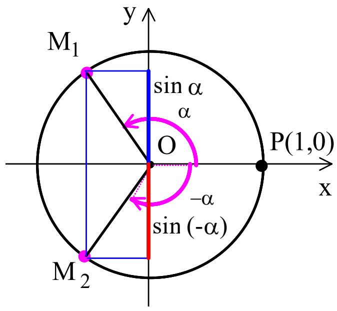
א. $\sin\alpha + \cos\alpha = -1.4$ ב. $\sin\alpha - \cos\alpha = 1.4$?

5.8 סינוס, קוסינוס וטנגנס של זוויות α ו- $-\alpha$



נתונות הנקודות M_1 ו- M_2 על מעגל היחידה. הן התקבלו מנקודה $P(1,0)$ באמצעות סיבוב לזוויות α ו- $-\alpha$ בהתאמה. ציר Ox חוצה זווית M_1OM_2, לכן הנקודות M_1 ו- M_2 סימטריות ביחס לציר זה.

שיעורי x של נקודות אלה שווים, ושיעורי y נבדלים רק בסימן: שיעורי הנקודה M_1 הם $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, ושל M_2 הם $(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.



בשרטוט רואים: (1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

שוויונות אלה נשארים גם כאשר זווית הסיבוב גדולה יותר: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

על פי הגדרת טנגנס נקבל:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \qquad (3)$$

באופן דומה מסיקים שגם עבור קוטנגנס מתקיים קשר דומה:

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha \qquad (4)$$

נוסחאות (1) – (4) מאפשרות לחשב ערכי סינוס, קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס של זוויות שליליות באמצעות ערכיהם עבור זוויות חיוביות.

דוגמאות

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

תרגילים

.42 חשבו את ערך הביטוי:

א. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ב. $\dfrac{1 + \tan^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{1 + \cot^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

ג. $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ד. $\cos(-\pi) + \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ה. $\dfrac{3 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

ו. $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3 + 7.5\tan(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$

.43 פשטו את הביטויים:

א. $\tan(-\alpha)\cdot\cos\alpha + \sin\alpha$ ב. $\cos\alpha - \cot\alpha\cdot(-\sin\alpha)$

ג. $\dfrac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ ד. $\tan(-\alpha)\cdot\cot(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha$

.44 הוכיחו זהויות:

א. $\cos\alpha\cdot\sin(6\pi-\alpha)\cdot(1+\cot^2(-\alpha)) = \cot(-\alpha)$

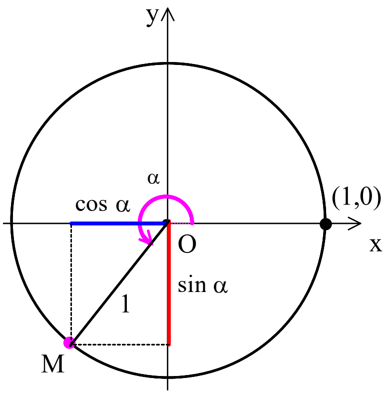
ב. $\dfrac{1-\sin^2(-\alpha)}{\cos(4\pi-\alpha)}\bullet\dfrac{\sin(\alpha-2\pi)}{1-\cos^2(-\alpha)} = \cot\alpha$

5.9 זהויות טריגונומטריות בסיסיות

להלן זהות שאתם כבר מכירים:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

נוכיח שתי זהויות בסיסיות נוספות:



$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & (1) \\ 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} & (2) \end{array}}$$

הוכחה

נתבונן בשרטוט: נקודה M התקבלה מנקודה (1,0) על ידי סיבוב סביב מרכז מעגל היחידה לזווית α. על פי ההגדרה, שיעורי הנקודה הם: $x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha$.

רדיוס-וקטור OM של הנקודה ושני ההיטלים x ו- y יוצרים משולש ישר זווית.

לפי משפט פיתגורס אפשר לרשום: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

שוויון זה מתקיים עבור כל זווית α, לכן זאת **זהות**.

כדי להוכיח זהות שנייה נחלק את שני האגפים של הזהות הקודמת ב- $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{או} \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

הערה למדתם כי מותר לחלק שני אגפי שוויון במספר שאינו אפס,

בהוכחה לעיל לא הסתייגנו ממקרה זה. האומנם טעינו?

ההסבר הוא בכך שיש להבדיל בין חישובים לבין הגדרות:

בחישובים (פתרון משוואות או מציאת הביטויים השקולים לביטוי נתון) חייבים לוודא שהמחלק אינו אפס, אחרת הביטוי שיתקבל עלול להיות חסר משמעות, ואילו בהגדרות איננו מחויבים למכנה שאינו אפס.

בפרט, על פי ההגדרה, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ גם כאשר $\cos\alpha = 0$!

במקרה זה $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ ו- $\tan\alpha$ אכן אינו מוגדר (שואף לאינסוף). הדבר אינו סותר את הגדרת הטנגנס כמנה של סינוס וקוסינוס (השווה לאפס במקרה זה).

זהויות אלה חשובות משום שהן מאפשרות למצוא שניים מבין הערכים של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ או $\tan\alpha$, כאשר הערך השלישי ידוע.

דוגמה 1 נתון: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$. מִצאו את $\sin\alpha$ ו- $\tan\alpha$.

◄ כיוון ש- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ אפשר לרשום:

$$\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (3)$$

גם ביטוי זה הוא זהות, ואפשר לצרף אותו לזהויות הבסיסיות.

בדומה לכך נקבל זהות דומה נוספת:

$$\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \qquad (4)$$

בביטויים אלה הסימן נקבע בהתאם לסימן הביטוי באגף שמאל (ראו סעיף 10 על סימני סינוס וקוסינוס).

מציבים נתונים ומקבלים:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 - 26}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

הערה בחרנו בסימן "+" כיוון שעל פי הנתון, הזווית נמצאת ברביע הראשון, שבו גם סינוס וגם טנגנס חיוביים.

דוגמה 2 מִצאו את $\sin\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

◀ ניעזר בנוסחה (3). כיוון ש- α נמצאת **ברביע השלישי** מסיקים כי- $\sin\alpha < 0$,
לכן בוחרים בסימן " - ":

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

דוגמה 3 מִצאו את $\cos\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ו- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

◀ כיוון ש- α נמצאת **ברביע הרביעי** מסיקים כי $\cos\alpha > 0$, לכן בוחרים בסימן "+" לפני השורש:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

נבדוק את **הקשר בין טנגנס לקוטנגנס**:

על פי ההגדרות: $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. נכפיל את שני השוויונות:
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$,

לכן: $$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha},\quad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad (5)$$

דוגמה 4 מִצאו את $\cot\alpha$ אם נתון: $\tan\alpha = 13$.

◀ נשתמש בנוסחה (5): $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{13}$

דוגמה 5 חִשבו את $\tan\alpha$ אם נתון: $\sin\alpha = 0.8$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

◀ נשתמש בנוסחה (4) ונמצא את $\cos\alpha$. מכיוון ש- α נמצאת ברביע השני, מסיקים כי $\cos\alpha < 0$.

לכן: $$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0.64} = -0.6$$

מציבים בנוסחה של טנגנס ומקבלים את התשובה:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

באמצעות הזהות הבסיסית (2) אפשר למצוא את טנגנס הזווית אם הקוסינוס ידוע ולהיפך. יש לזכור, כי נוסחה (2) מתקיימת אם $\cos\alpha \neq 0$, כלומר: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in Z$.

דוגמה 6 מְצאו את $\tan\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

◀ נשתמש בנוסחה (2):
$$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}$$

כיוון שטנגנס ברביע השני שלילי, מסיקים כי- $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$.

דוגמה 7 מְצאו את $\cos\alpha$, אם נתון: $\tan\alpha = 3$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

◀ מחלצים את $\cos^2\alpha$ מנוסחה (2):
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{10}$$

זווית α נמצאת ברביע השלישי, שבו $\cos\alpha < 0$, לכן $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

תרגילים

.45 ענו בעל פה: האם סינוס (או קוסינוס) יכול להיות שווה ל-

א. 0.03 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{5}{3}$ ד. $\frac{11}{13}$ ה. $-\frac{13}{11}$ ו. $\sqrt{2}$?

.46 האם השוויונות הללו יכולים להתקיים בו זמנית:

א. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ו- $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ב. $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ו- $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

ג. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ ו- $\cos\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$ ד. $\sin\alpha = 0.2$ ו- $\cos\alpha = 0.8$?

.47 חשבו:

א. $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ ו- $\cot\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ב. $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ו- $\cot\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

.48 מְצאו את הערך של כל אחת מהפונקציות הטריגונומטריות, אם נתון:

א. $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ ו- $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ב. $\sin\alpha = 0.8$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ג. $\tan\alpha = \frac{15}{8}$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ד. $\cot\alpha = -3$ ו- $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

ה. $\cos\alpha = 0.8$ ו- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ו. $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ו- $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

ז. $\tan\alpha = -2.4$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ח. $\cot\alpha = \frac{7}{24}$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

49. אלו ערכים יכולים להיות ל-

א. $\cos\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$; $\sin\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

ג. $\sin\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ד. $\cos\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

50. האם השוויונות הללו יכולים להתקיים בו זמנית:

א. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ ו- $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$ ב. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ו- $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

51. α היא אחת מזוויותיו של משולש ישר זווית.

מצאו את $\cos\alpha$ ו- $\tan\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$.

52. נתון: $\tan\alpha = 2$. מצאו את ערך הביטוי:

א. $\frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ ב. $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

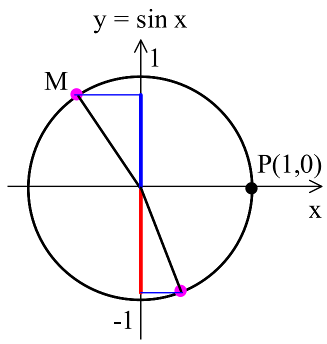
ג. $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ ד. $\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

53. נתון: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$. מצאו את:

א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ ב. $\sin^3\alpha + \cos^3$

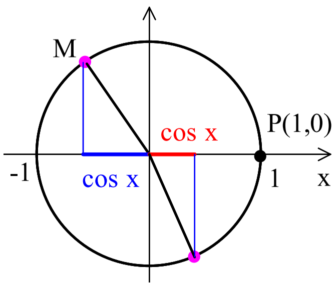
בסעיפים הקודמים למדנו שלכל מספר ממשי x מתאימה נקודה אחת ויחידה בלבד על מעגל היחידה, והיא מתקבלת על ידי סיבוב הנקודה (1,0) לזווית של x רדיאנים.
לכל זווית הגדרנו באופן חד משמעי את הערכים של sin x, cos x, tan x ו- cot x.
כלומר הקשרים בין x לבין הערכים הללו הם, למעשה, **פונקציות**.
כיוון ש- sin x ו- cos x מוגדרים לכל x, מסיקים כי

תחום ההגדרה של הפונקציות sin x ו- cos x הוא - כל המספרים הממשיים.



כדי למצוא את טווח הערכים של הפונקציה $f(x) = \sin x$, יש לברר אלו ערכים יכולה לקבל הפונקציה f כאשר x עובר בתחום הגדרתה.

כיוון שעבור כל x מתחום ההגדרה ערכו של sin x שווה לשיעור y של נקודה על המעגל, מסיקים כי $|f(x)| = |\sin x| \le |R| = 1$.
כלומר טווח הערכים של הפונקציה $f(x) = \sin$ x הוא הקטע $-1 \le y \le 1$.
בדומה לכך, גם טווח הערכים של הפונקציה $f(x) = \cos x$ הוא הקטע $-1 \le y \le 1$.



מתחומי ההגדרה וטווחי הערכים של הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות sin x ו- cos x אפשר להסיק על תכונות של פונקציות טריגונומטריות מורכבות.

דוגמה 1

מצאו את תחום ההגדרה ואת טווח הערכים של הפונקציה $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

◄ נמצא את הערכים של x שעבורם הביטוי $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ הופך לביטוי חסר משמעות (בח"מ), כלומר כאשר מכנהו שווה לאפס:

$$\sin x + \cos x = 0$$

נפתור משוואה זו בשתי דרכים: אלגברית וגיאומטרית.

א. **דרך אלגברית.** נעביר קוסינוס לאגף ימין:

$$\sin x = -\cos x \qquad (1)$$

נוודא ש- $\cos x \neq 0$: $\cos x = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ראו דוגמה 5 בסעיף 8).

עבור אותם הערכים של x מתקיים: $\sin x \neq 0$, ושוויון (1) אינו מתקיים.

לכן מותר לחלק את שני האגפים ב- $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1, \tan x = -1$$

בסעיף 5.8 ראינו ש- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, לכן המשוואה $\tan x = -1$

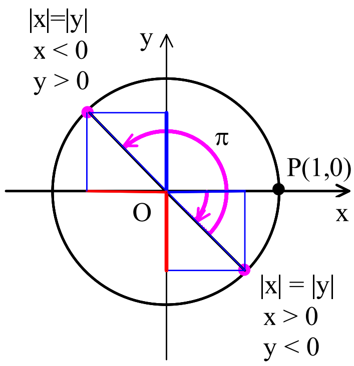
שקולה למשוואה: $\tan(-x) = 1$.

מהתכונות של טנגנס בתחום בין 0 ל- 2π אנו יודעים ש- $\tan\alpha = 1$ כאשר $\alpha = \frac{\pi}{4}$

או $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi$. בתחום הרחב נקבל: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

נציב במקומו של α את $(-x)$ ונקבל תשובה סופית: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

ב. דרך גיאומטרית



כיוון שייצוגם של סינוס וקוסינוס במעגל היחידה הם שיעורי y ו- x של הנקודה המסתובבת במעגל, נחפש מקומות, שעבורם מתקיים שווין השקול ל- (1): $x = -y$.

בשרטוט אפשר לראות שישנם שני מקומות כאלה: ברביע הרביעי עבור $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

וברביע השני, כאשר $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi$.

מצאנו שני פתרונות בתחום הזוויות הקטנות $(0 \le \alpha \le 2\pi)$.

נוסיף סיבובים שלמים לשתי הפתרונות ונקבל שתי סדרות של פתרונות בתחום הרחב (של כל המספרים הממשיים): $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ו- $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi k$.

את שני הפתרונות האלה אפשר לאחד לפתרון אחד: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

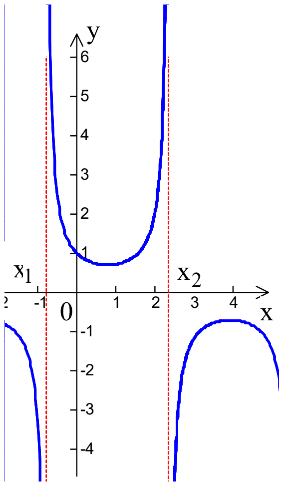
בדקו וודאו בעצמכם שהערכים של x, שיתקבלו עבור מספרי k שונים, אכן מכסים את כל הפתרונות של שתי הסדרות x_1 ו- x_2!

נמצא את טווח הערכים של הפונקציה.

נחקור תחילה את תחום המספרים המתאימים לסיבוב אחד.

כיוון שבנקודות $x_1 = -\frac{\pi}{4} \approx -0.79$ ו- $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi \approx 2.35$

מכנה הפונקציה מתאפס, ערכי הפונקציה בנקודות אלה "שואפים" לאינסוף.



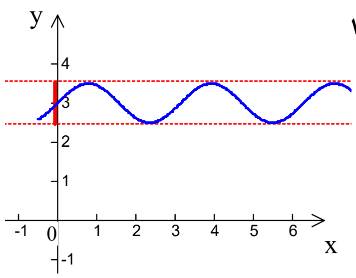
כלומר, כאשר x מתקרב מאוד לנקודות האלה, ערכי הפונקציה גדלים מאוד.

בגרף הפונקציה בתחום זה רואים כי לערכי הפונקציה סימנים מנוגדים משני צדי הנקודות x_1 ו- x_2, לכן טווח הערכים של הפונקציה הוא קבוצת כל המספרים הממשיים : $y \in R$.

דוגמה 2

מצאו את טווח הערכים של הפונקציה $f(x) = 3 + \sin x \cdot \cos x$.

◄ עלינו לבדוק, אלו ערכים יכולה לקבל הפונקציה עבור ערכים שונים של x, כלומר למצוא את אותם הערכים של a שעבורם למשוואה $3 + \sin x \cdot \cos x = a$ יש פתרונות.



נשתמש בנוסחת הסינוס של זווית כפולה ונרשום את המש

$$3 + \frac{1}{2}\sin 2x = a$$

מכאן נמצא : $\sin 2x = 2a - 6$.

כיוון שטווח הערכים של סינוס הוא הקטע $[-1,1]$,

מסיקים כי- $-1 \le 2a - 6 \le 1$;

מכאן מוצאים : $5 \le 2a \le 7$ ולבסוף : $2.5 \le a \le 3.5$.

תשובה : $2.5 \le y \le 3.5$.

הערה : נתבונן בגרף הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi \approx 6.5$ ונוודא שטווח הערכים שמצאנו אכן תואם לגרף.

תחום ההגדרה וטווח הערכים של tan x ו- cot x

הפונקציה $f(x) = \tan x$ מוגדרת באמצעות הנוסחה: $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

לכן פונקציה זו מוגדרת לכל x שעבורו $\cos x \neq 0$.

ידוע (ראו דוגמה 5 מסעיף 8), כי $\cos x = 0$ כאשר $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

לכן תחום ההגדרה של פונקציה $f(x) = \tan x$ הוא קבוצת כל המספרים הממשיים

למעט המספרים מהסוג $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

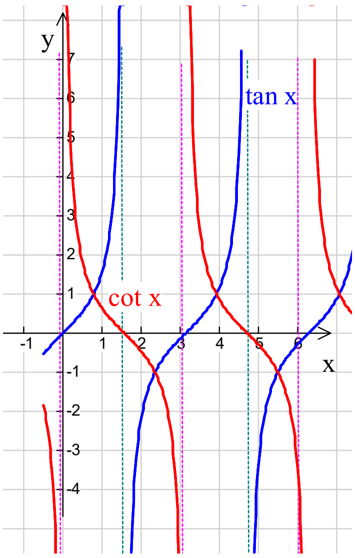
בנקודות הקרובות לנקודות אלה, ערכי קוסינוס שואפים לאפס, וערכי סינוס שואפים

ל- 1, לכן ערכי טנגנס יכולים להיות גדולים מאוד:

$$x \to \frac{\pi}{2},\ \cos x \to 0,\ \sin x \to 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to \infty$$

כאשר $x \to -\dfrac{\pi}{2}$ (סיבוב בכיוון השעון, הנקודה נמצאת ברביע הרביעי) נקבל:

$$x \to -\frac{\pi}{2},\ \cos x > 0, \cos x \to 0,\ \sin x \to -1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \to -\infty$$



כלומר טווח הערכים של טנגנס הוא כל המספרים הממשיים: $-\infty < \tan x < \infty$

באופן דומה נסיק כי תחום ההגדרה של פונקציה $f(x) = \cot x$ הוא כל ציר המספרים הממשיים למעט הנקודות שבהן $\sin x = 0$: $x \neq \pi k, k \in Z$

וטווח הערכים: $-\infty < \cot x < \infty$

בגרפים משמאל אפשר לראות, שבאותן הנקודות שבהן טנגנס מתאפס, ערכן של הקוטנגנס שואף לאינסוף, ולהיפך.

דוגמה 3

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה

$$f(x) = \sin 3x + \tan 2x$$

◄ יש לבדוק, עבור אלו ערכים של x יש לביטוי $\sin 3x + \tan 2x$ משמעות.

לביטוי $\sin 3x$ יש משמעות עבור כל ערך של x, ולביטוי $\tan 2x$ יש משמעות כאשר

$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. מכאן נמצא את תחום הערכים האפשריים של x:

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

דוגמה 4*

מצאו את תחום הערכים של הפונקציה $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$.

◄ נבדוק, עבור אלו ערכים של a יש למשוואה $3\sin x + 4\cos x = a$ פתרונות.

נחלק את שני האגפים של המשוואה ב- 5:

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{a}{5}$$

(מדוע 5 ? כי $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$)

כיוון ש- $0 < \frac{3}{5} < 1$, קיימת זווית α שעבורה $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

על פי הזהות הבסיסית הראשונה: $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

לכן אפשר לרשום את המשוואה בצורה הבאה: $\sin x \cdot \cos\alpha + \cos x \cdot \sin\alpha = \frac{a}{5}$

נשתמש בנוסחה לסינוס של סכום ונקבל: $\sin(x + \alpha) = \frac{a}{5}$.

שוויון זה יכול להתקיים אם $-1 \leqslant \frac{a}{5} \leqslant 1$, מכאן נסיק $-5 \le a \le 5$.

תשובה: $-5 \le y \le 5$.

תרגילים

54. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה:

א. $f(x) = \sin 2x$ ב. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ ג. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$

ד. $f(x) = \sin\frac{2}{x}$ ה. $f(x) = \sin\sqrt{x}$ ו. $f(x) = \cos\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

55. מצאו את טווח הערכים של הפונקציה:

א. $f(x) = 1 + \sin x$ ב. $f(x) = 1 - \cos x$ ג. $f(x) = 2\sin x + 3$

ד. $f(x) = 1 - 4\cos 2x$ ה. $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 2x + 2$ ו. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x - 1$

56. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה:

א. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{\sin x}$ ג. $f(x) = \tan\frac{x}{3}$ ד. $f(x) = \tan 5x$

57. א. $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$ ב. $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$

ג. $f(x) = \sqrt{2\cos x - 1}$ ד. $f(x) = \sqrt{1 - 2\sin x}$

58. א. $f(x) = \dfrac{1}{2\sin^2 x - \sin x}$ ב. $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

ג. $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \sin 3x}$ ד. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3 x + \cos x}$

59. מצאו את טווח הערכים של הפונקציה:

א. $f(x) = 2\sin^2 x - \cos 2x$ ב. $f(x) = 1 - 8\cos^2 x \cdot \sin^2 x$

ג. $f(x) = \dfrac{1 + 8\cos^2 x}{4}$ ד. $f(x) = 10 - 9\sin^2 3x$

ה. $f(x) = 1 - 2|\cos x|$ ו. $f(x) = \sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

60. מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה:

$f(x) = 3\cos 2x - 4\sin 2x$.

61. מצאו את טווח הערכים של הפונקציה: $f(x) = \sin x - 5\cos x$.

62. מצאו את טווח הערכים של הפונקציה: $f(x) = 10\cos^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x$.

תשובות (54-62)

54. א. $x \in R$ (כל המספרים הממשיים) ב. $x \in R$ ג. $x \neq 0$

ד. $x \neq 0$ ה. $x \geq 0$ ו. $x \geq 1$ או $x < -1$

55. א. $[0, 2]$ ב. $[0, 2]$ ג. $[1, 5]$

ד. $[-3, 5]$ ה. $[1.4, 2.5]$ ו. $[-1.25, -0.75]$

56. א. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ ב. $x \neq \pi k,\ k \in Z$

ג. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi \cdot (3k + 1),\ k \in Z$ ד. $x \neq \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5},\ k \in Z$

57. א. $-\pi + 2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k,\ k \in Z$ ב. $x = 2\pi k,\ k \in Z$

ג. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ ד. $-\frac{\pi}{3} + \pi\cdot(2k-1) \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

58. ב. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$ ד. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

59. ב. $[-1, 1]$ ד. $[1, 10]$ ו. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

60. 5 ו- 5-.

61. $[-\sqrt{26}, \sqrt{26}]$

62. $[1, 11]$

בסעיפים קודמים חישבנו ערכי פונקציות טריגונומטריות של כמה זוויות מיוחדות ברביע הראשון של מערכת הצירים: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ ו- $\frac{\pi}{2}$, וכן זוויות ברביע השני, השלישי והרביעי, אשר נבדלות מהזוויות החדות ברבע או בחצי סיבוב.

אלא שבמקרים רבים עלינו לדעת את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של כל זווית. לשם כך יש נוסחאות חיבור, המאפשרות לחשב פונקציות מהסוג

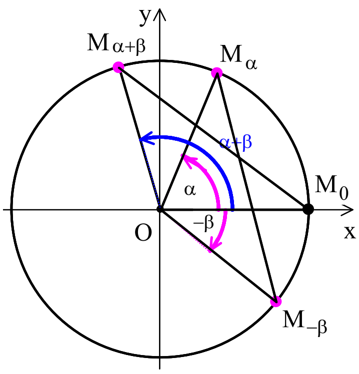
$\cos(\alpha \pm \beta)$ ו- $\sin(\alpha \pm \beta)$,

כלומר סינוס וקוסינוס של סכום או הפרש הזוויות, כאשר פונקציות של זוויות בודדות נתונות.

משפט

לכל α ו- β מתקיים השוויון: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

הוכחה



נסמן על מעגל היחידה את הנקודות M_α, $M_{-\beta}$ ו- $M_{\alpha+\beta}$ שמתקבלות מהנקודה $M_0(1,0)$ באמצעות סיבוב לזוויות α, $(-\beta)$ ו- $(\alpha+\beta)$ בהתאמה.

על פי ההגדרות של סינוס וקוסינוס, שיעורי הנקודות האלה הם:

$$M_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha),\ M_{-\beta}(\cos(-\beta), \sin(-\beta)),$$

$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) \qquad (1)$$

כיוון ש- $\angle M_{-\beta}OM_\alpha = \angle M_0OM_{\alpha+\beta}$ מסיקים כי המשולשים שווי השוקיים $\triangle M_0OM_{\alpha+\beta}$ ו- $\triangle M_{-\beta}OM_\alpha$ חופפים, לכן שווים בסיסיהם: $M_\alpha M_{-\beta} = M_{\alpha+\beta}M_0$.

ושווים גם ריבועי הבסיסים: $(M_\alpha M_{-\beta})^2 = (M_{\alpha+\beta}M_0)^2$.

כעת, נשתמש בנוסחת המרחק בין שתי נקודות: $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$

ונציב במקום שיעורי הנקודות את הביטויים (1):

$$(M_\alpha M_{-\beta})^2 = (\cos\alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin\alpha - \sin(-\beta))^2 =$$

(נשתמש בתכונות הזוגיות של הקוסינוס והאי-זוגיות של הסינוס)

$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\beta =$$

(נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבסיסית)

$$= 2 + 2\sin\alpha\cdot\sin\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta. \qquad (2)$$

באופן דומה נפתח את אורך הבסיס השני:

$$(M_{\alpha+\beta}M_0)^2 = (\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta) - 0)^2 =$$

$$= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) =$$

(נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבסיסית)

$$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta). \qquad (3)$$

נשווה את (2) ו- (3) ונקבל את המבוקש:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \text{(I)}$$

דוגמה 1

חשבו את $\cos 75°$.

◄ נשתמש בנוסחה של קוסינוס של סכום:

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

נציב בנוסחה (I) את $(-\beta)$ במקום β ונקבל את הנוסחה ל**קוסינוס של הפרש**:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

ניעזר בתכונה של **זוגיות** של קוסינוס **ואי-זוגיות** של סינוס ונקבל סופית:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \text{(II)}$$

דוגמה 2

חשבו את $\cos 15°$.

◄ נשתמש בנוסחה של קוסינוס של הפרש:

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

דוגמה 3

הוכיחו את הנוסחאות:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,\ \ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha} \qquad \text{(III)}$$

הוכחה

נציב בנוסחה (II) את $\alpha = \frac{\pi}{2}$ במקום α ונקבל:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\bullet\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\bullet\sin\beta = \sin\beta$$

נחליף את β ל- α ונקבל: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

נחליף את סדר האגפים: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ונציב במקום α את $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\alpha$$

ניעזר בנוסחאות (I) – (III) ונפתח את נוסחת החיבור לסינוס:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\bullet\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\bullet\sin\beta = \sin\alpha\bullet\cos\beta + \cos\alpha\bullet\sin\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \text{(IV)}$$

נציב בנוסחה זאת את $(-\beta)$ במקום β ונקבל את הנוסחה לסינוס ההפרש:

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \text{(V)}$$

דוגמה 4

חשבו את $\sin 210°$.

◄ נשתמש בנוסחה לסינוס של סכום:

$$\sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180°\bullet\cos 30° + \cos 180°\bullet\sin 30° =$$

$$= 0\bullet\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)\bullet\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

דוגמה 5

חשבו את ערך הביטוי: $\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}$

◀ בביטוי הנתון אפשר לזהות את האגף הימין של הנוסחה לסינוס ההפרש:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7} = \sin\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin\pi = 0$$

דוגמה 6*

הוכיחו את השוויון:

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}} \qquad \text{(VI)}$$

◀

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

נחלק את המונה ואת המכנה של השבר במכפלה $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ ונקבל את המבוקש:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} =$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

נוסחה (VI) יכולה לעזור בחישובי טנגנס של זוויות גדולות, לדוגמה:

$$\tan 225° = \tan(180° + 45°) = \frac{\tan 180° + \tan 45°}{1 - \tan 180°\cdot\tan 45°} = 1$$

תרגילים

63. חשבו בעזרת נוסחאות חיבור:

א. $\cos 135°$ ב. $\cos 120°$ ג. $\cos 150°$ ד. $\cos 240°$

64. חשבו:

א. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ב. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, אם $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

65. פשטו את הביטוי:

א. $\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$ ב. $\cos 5\beta\cdot\cos 2\beta + \sin 5\beta\cdot\sin 2\beta$

ג. $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$

ד. $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$

.66 חשבו ללא מחשבון:

א. $\sin 73°\cdot\cos 17° + \cos 73°\cdot\sin 17°$

ב. $\sin 73°\cdot\cos 17° - \cos 73°\cdot\sin 17°$

ג. $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$ ד. $\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{7\pi}{12}$

.67 חשבו:

א. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, אם נתון: $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ו- $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

ב. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, אם נתון: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ו- $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

.68 פשטו את הביטוי:

א. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\beta)$ ב. $\cos(-\alpha)\cdot\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

ג. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$ ד. $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$

.69 חשבו את $\cos(\alpha+\beta)$ ו- $\cos(\alpha-\beta)$ אם נתון: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
ו- $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

.70 חשבו את $\sin(\alpha-\beta)$, אם נתון: $\cos\alpha=-0.8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$
ו- $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

.71 חשבו את $\tan(\alpha+\beta)$ אם נתון: $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$
ו- $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$

.72 פשטו את הביטוי:

א. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ ב. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

ג. $\cos 3\alpha+\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$ ד. $\cos 2\alpha-\cos\alpha\cdot\cos 3\alpha$

73. הוכיחו זהות:

א. $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ ב. $\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\alpha\cdot\cot\beta-1}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

ג. $(\cos\alpha-\sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ ד. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}=\cot\beta-\tan\alpha$

ה. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

ו. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

74. חשבו ללא מחשבון:

א. $\frac{\tan 29°+\tan 31°}{1-\tan 29°\cdot\tan 31°}$ ב. $\frac{\tan\frac{7}{16}\pi-\tan\frac{3}{16}\pi}{1+\tan\frac{7}{16}\pi\cdot\tan\frac{3}{16}\pi}$

ג. $\frac{1+\tan 10°\cdot\tan 55°}{\tan 55°-\tan 10°}$ ד. $\frac{1-\tan 13°\cdot\tan 17°}{\tan 17°+\tan 13°}$

75. חשבו:

א. $\tan(\alpha+\beta)$, אם נתון: $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$ ו- $\tan\beta=2.4$

ב. $\cot(\alpha-\beta)$, אם נתון: $\cot\alpha=\frac{4}{3}$ ו- $\cot\beta=-1$.

76. פשטו את הביטוי:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$$

77. פשטו את הביטוי:

א. $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$ ב. $\sin 5\beta\cdot\cos 3\beta-\sin 3\beta\cdot\cos 5\beta$

78. פתרו את המשוואה:

א. $\cos 6x\cdot\cos 5x+\sin 6x\cdot\sin 5x=-1$

ב. $\sin 3x\cdot\cos 5x-\sin 5x\cdot\cos 3x=-1$

ג. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x=1$

ד. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}=1$