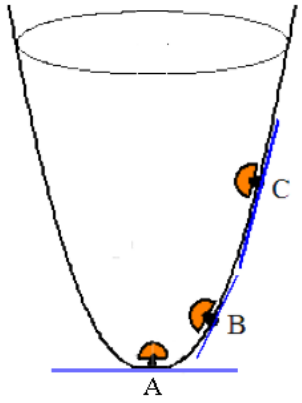
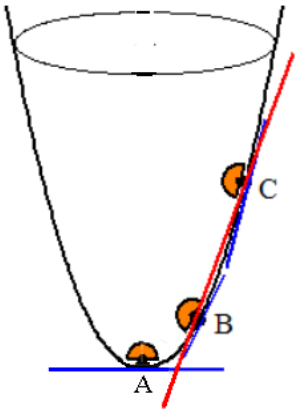
2. הנגזרת



הביטו בחיפושית המטפסת מעלה במשטח פנימי של הקערה. באיזו נקודה – A, B או C היא מתאמצת יותר? ברור שבנקודה A המאמץ הוא הקטן ביותר, מכיוון שהחיפושית נמצאת במשטח אופקי, בנקודה B החיפושית בתחילת העלייה, ובנקודה C היא מטפסת ממש בקושי.

בשפה המתמטית אפשר לתאר את המצב על ידי **שיפוע המשיק** למסלול העלייה: ככל שהשיפוע גדול יותר, המאמץ הנדרש הולך וגדֵל.



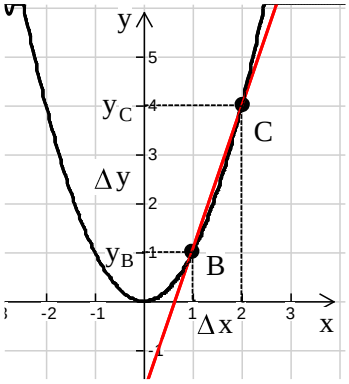
כיצד נַחשב את השיפוע של המסלול בנקודה כלשהי, אם ידועה לנו משוואת העקומה המתארת את המסלול?

נניח שהעקומה היא גרף של פונקציה ריבועית: $y(x) = x^2$, כאשר תחתית הקערה נמצאת בנקודה $x = 0$.

ברור ששיפוע המשיק לעקומה בנקודה זאת הוא $m = 0$.

אולם, מה יהיה השיפוע בנקודה כלשהי, לדוגמה בנקודה B?

כדי לחשב אותו נעביר ישר דרך שתי הנקודות B ו- C, כאשר נקודה C נמצאת גבוה יותר מנקודה B. מהשרטוט אפשר לראות שישר זה כמעט משיק לפרבולה בנקודה B. ככל שנקודה C תהיה קרובה יותר לנקודה B, כך המיתר BC ילך ויתקרב למשיק לעקומה בנקודה B, ושיפוע הישר יתקרב לשיפוע המשיק: $m_{BC} \approx m_B$.



שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות B ו- C שווה ל:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

נסמן את ההפרש בין שיעורי x של שתי הנקודות ב- Δx (המכונה **תוספת קטנה** ל- x; נקרא **דלתא** איקס):

$$\Delta x = x_C - x_B$$

ובדומה לכך נגדיר **תוספת קטנה ל- y**: $\Delta y = y_C - y_B$.

במושגים של תוספות קטנות שיפוע הישר BC שווה ל- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

ברור כי Δy היא התוספת שאותה רוכשת הפונקציה y כאשר x גדל ב- Δx:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

נחשב את השיפוע המשיק לעקומת המסלול במקרה של פונקציה ריבועית $f(x) = x^2$.

נחשב את Δf: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$

$$= x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

נציב בנוסחה לשיפוע הישר:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

נצמצם ב- Δx: $\underline{m = 2x + \Delta x}$ (1)

לדוגמה: שיפוע המיתר BC בקרבה לנקודת המינימום של גרף הפונקציה $y = x^2$ $(x = 0)$ שווה ל: $m(0) = 2\cdot 0 + \Delta x = \Delta x$

אם נרצה לדעת את שיפוע המשיק לגרף **בדיוק** בנקודה 0, צריך לחשב את הביטוי האחרון כאשר בו Δx **שואפת לאפס** (נקודה C מתקרבת לנקודה B למרחק אינסופי קטן).

במקרה גבולי זה אפשר לרשום בביטוי האחרון $\Delta x = 0$ ואז נקבל: $\underline{m(0) = 0}$.

ומה שיפוע המשיק בנקודה B, אשר בה $x = 1$?

נציב בנוסחה (1) שפיתחנו $x = 1$: $m(1) = 2\cdot 1 + \Delta x = 2 + \Delta x$

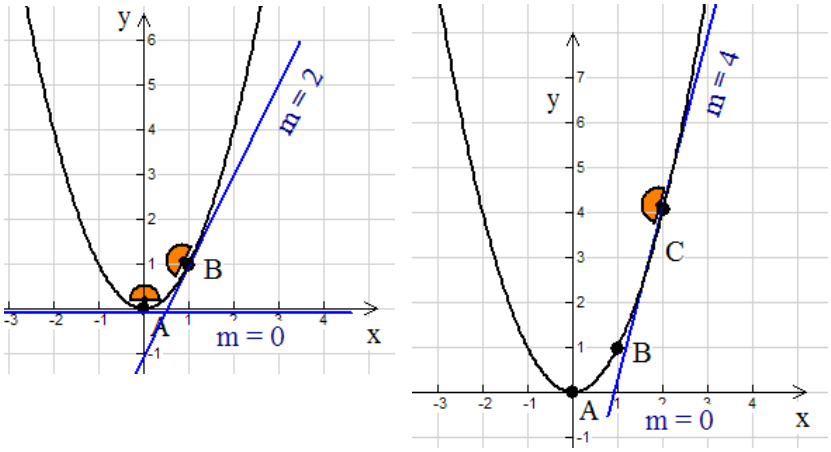
גם כאן, כמו במקרה הקודם, כדי לקבל את ערך שיפוע המשיק בנקודה $x = 1$, יש לחשב **גבול** של הביטוי כאשר Δx **שואפת לאפס**.

תוצאת החישוב רושמים כך: $m(1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2\cdot 1 + \Delta x) = 2$.

בנקודה C $(x = 2)$ נקבל באופן דומה: $m(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (2\cdot 2 + \Delta x) = 4$.

ובמקרה הכללי, כאשר נרצה לחשב את השיפוע בנקודה x כלשהי, נקבל:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2\cdot x + \Delta x) = 2x$$



שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $\mathbf{f(x) = x^2}$ בנקודה x שווה ל- $\mathbf{m = 2x}$.

מה היה קורה, אילו צורת הגרף של פונקציה הייתה שונה? למשל, אילו הייתה מתוארת על ידי המשוואה $y = x^3$?

נחשב את שיפוע המשיק לעקומה זו בכל נקודה x באופן דומה:

נחשב את ההפרש $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ ונחלק אותו ב- Δx:

$$y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

(זאת על פי הנוסחה: $(a + b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

נחלק ב- Δx ונקבל m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

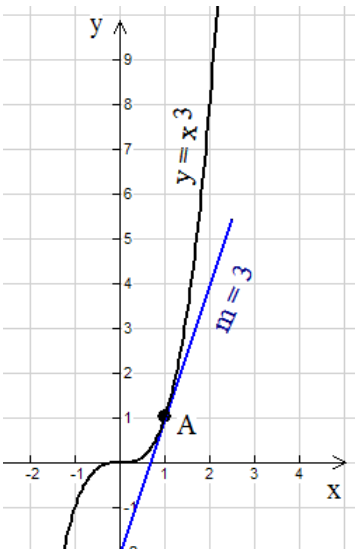
אם נרצה לדעת את שיפוע המשיק בנקודה x, יש צורך לחשב את הגבול:

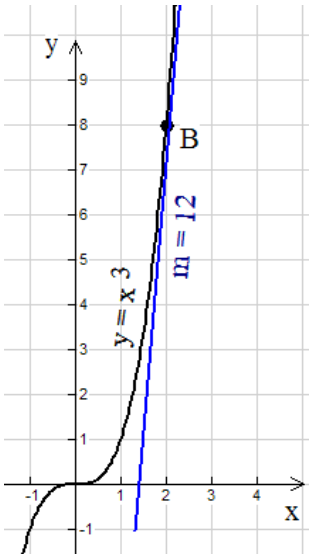
$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2\right) = 3x^2$$

כלומר, עבור הפונקציה $\mathbf{y = x^3}$ גודל השיפוע בכל נקודה x שווה ל- $\mathbf{m = 3x^2}$.

לדוגמה, שיפוע המשיק בנקודות A (x = 1) ו- B (x = 2) שווה בהתאמה ל-

$$m(1) = 3 \cdot 1^2 = 3,\ m(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$



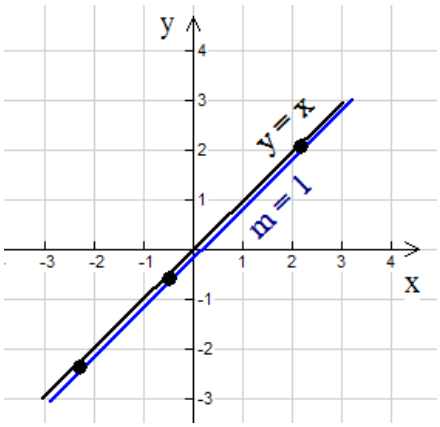


אפשר להוכיח שעבור כל **פונקציית חזקה** $y = x^n$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x כלשהי שווה ל- $\mathbf{m = n \cdot x^{n-1}}$.

דוגמה 1

מִצאו את שיפוע המשיק לגרף של **פונקציה קווית** $f(x) = x$ בנקודה $x = 2$.

◀ מכיוון ש- $x = x^1$, מסיקים כי $n = 1$. ולכן: $m = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$.



המסקנה: שיפוע המשיק לגרף של פונקציה קווית $y = x$ הינו קבוע (לא תלוי ב- x): $m = 1$.

כלומר, טיפוס במעלה של מדרון ישר קשה באותה מידה לאורך כל המדרון!

הערה במקרה של פונקציה קווית, הגרף שלה הוא קו ישר, ומשיק בכל נקודה של הגרף הוא הגרף עצמו, ששיפועו m שווה ל- 1, מה שמתאים לתוצאת חישוב השיפוע באמצעות הנוסחה.

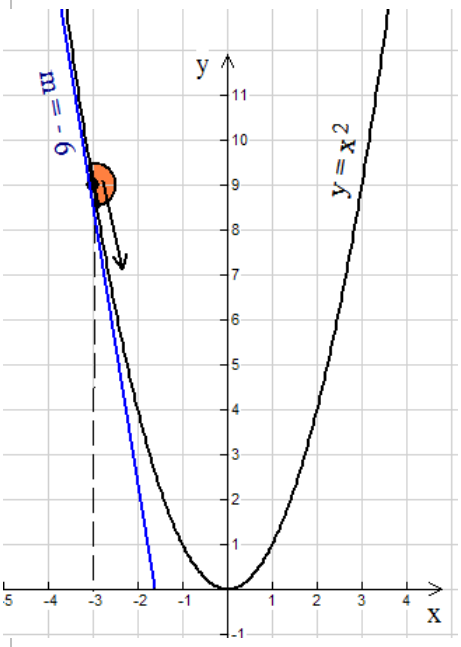
דוגמה 2 מצאו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$ בנקודה $x = 2$.

◀ נתון: $n = 4$, $x = 2$. נשתמש בנוסחה לנגזרת של פונקציית חזקה:

$$\underline{m} = n \cdot x^{n-1} = 4 \cdot 2^{4-1} = 4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = \underline{32}$$

דוגמה 3

מצאו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y(x) = x^2$ בנקודה $x = -3$.



◀ נתון: $n = 2$, $x = -3$

$$m = n \cdot x^{n-1} = 2 \cdot (-3)^{2-1} = 2 \cdot (-3) = -6$$

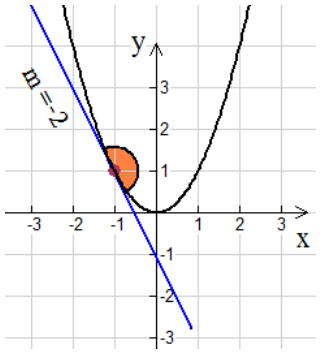
מה המשמעות לשיפוע שלילי?

הביטו בגרף הפונקציה בסביבת הנקודה $x = -3$: הפונקציה **יורדת** (ערכיה הולכים וקטנים כאשר x גדל), לכן השיפוע הוא שלילי.

דוגמה 4

החיפושית ממשיכה לרדת במורד הענף השמאלי של הפרבולה עד לנקודה בעלת שיעור $x = -1$.

מה שיפוע המשיק לגרף הפרבולה $f(x) = x^2$ בנקודה זו?



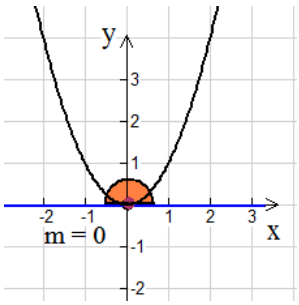
◀ נתון: $n = 2$, $x = -1$

$$m(-1) = n \cdot (-1)^{n-1} = 2 \cdot (-1)^{2-1} = 2 \cdot (-1) = -2$$

דוגמה 5

החיפושית הגיעה לתחתית המסלול ($x = 0$).

מה שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה זו?



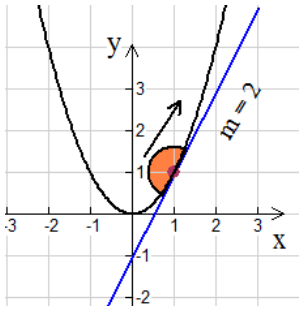
◀ נתון: $n = 2$, $x = 0$

$$m(0) = n \cdot (0)^{n-1} = 2 \cdot (0)^{2-1} = 2 \cdot (0) = 0$$

דוגמה 6

החיפושית עברה לענף ימין של המסלול והגיעה לנקודה שבה $x = 1$.

מה שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה זו?



◀ נתון: $n = 2$, $x = 1$

$$m(1) = n\cdot(1)^{n-1} = 2\cdot(1)^{2-1} = 2\cdot(1) = 2$$

תרגילים

90. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y(x) = x^4$ בנקודה $x = -2$.

91. מצאו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^5$ בנקודות $x = 3$ ו $x = -3$.

92. איפה קשה יותר לחיפושית לטפס מעלה: בנקודה $x = 3$ של הקערה המתוארת על ידי המשוואה $y(x) = x^3$ או בנקודה $x = -2$ של הקערה המתוארת על ידי המשוואה $y(x) = x^2$?

93. מה שיעורי הנקודה על גרף הפונקציה $y(x) = x^2$ ששיפוע המשיק לגרף באותה נקודה הוא:

א) $m = -2$ ב) $m = 3$ ג) $m = -1$ ד) $m = 5$?

94. מה שיעורי הנקודה על גרף הפונקציה $y(x) = x^3$ ששיפוע המשיק לגרף באותה נקודה הוא:

א) $m = 12$ ב) $m = 27$ ג) $m = 75$ ד) $m = 0$?

2.2 נגזרת של פונקציה. כללי הגזרה

עבור כל פונקציה $f(x)$ אפשר לחשב את שיפוע המשיק לגרף בכל נקודה x הנמצאת בתחום הגדרתה, לפי השיטה שתיארנו בסעיפים הקודמים:

א. מחשבים את התוספת הקטנה לפונקציה: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

ב. מחלקים את Δf ב- Δx: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

ג. מחשבים את גבול היחס $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ כאשר Δx שואף לאפס, ומקבלים את ערך השיפוע m של משיק לגרף הפונקציה בנקודה x.

בשפה המתמטית רושמים את זה כך:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

כאשר הסימן $\lim_{\Delta x \to 0} (...)$ מכונה **גבול** ומתאר את ההצבה $\Delta x = 0$ בביטוי שהתקבל לאחר החילוק של Δf ב- Δx.

מכיוון שגודל השיפוע m תלוי בנקודה x שעבורה הוא חושב, הוא גם מהווה פונקציה של x.

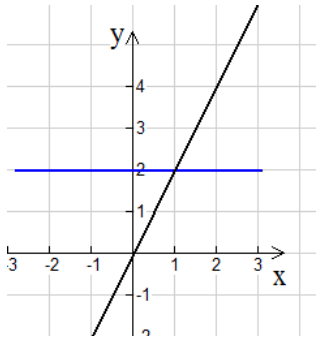
כך, מצאנו, למעשה, שעבור $f(x) = x^2$ יהיה $m(x) = 2x$, וקיבלנו ערכי שיפוע שונים בנקודות שונות על הפרבולה.

ואילו עבור $f(x) = x^3$ מצאנו: $m(x) = 3x^2$, וכן פיתחנו ביטוי התלוי ב- x עבור חזקות גבוהות.

כלומר: לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה מתאימה $m(x)$ של ערכי שיפוע המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$. מכנים פונקציה זו בשם **פונקציה נגזרת** של $f(x)$, ומסמנים אותה בצורה הבאה: **$f'(x)$** (מבטאים: אֶף טאג של איקס), או $(f(x))'$.

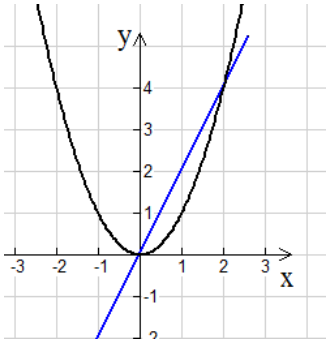
אם נשרטט גרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים, נקבל, כמובן, גרפים שונים.

לדוגמה, כך נראים גרפים של פונקציות שונות ופונקציות הנגזרת המתאימות:



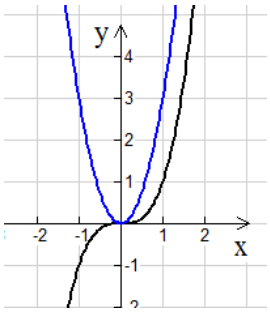
$f(x) = 2x$

$f'(x) = 2$



$f(x) = x^2$

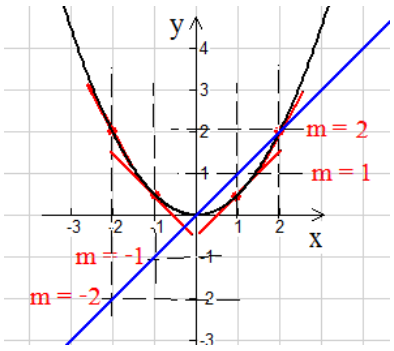
$f'(x) = 2x$



$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

בכל גרף שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת x שווה לערך של פונקציית הנגזרת באותה הנקודה.



עבור פונקציה קווית: המשיק לישר מתלכד עם הישר עצמו, לכן השיפוע הוא קבוע, וגרף של פונקציית הנגזרת הוא ישר המקביל לציר x;

עבור פונקציה ריבועית $f(x) = 0.5x^2$, $f'(x) = x$ (ראו גרף משמאל) גודל שיפוע המשיק בכל נקודה שווה לערכהּ של פונקציית הנגזרת באותה הנקודה. כך גם עבור פונקציות אחרות.

כאשר המשתנה הבלתי תלוי הוא <u>זמן</u> (המסומן בדרך כלל באות t), והפונקציה היא <u>דרך</u> שאותה עובר גוף (המסומנת בדרך כלל באות S), אז <u>לנגזרת של דרך בזמן</u> $S'(t)$ יש משמעות נוספת מלבד גודל השיפוע המשיק לגרף של $S(t)$ ברגע מסוים t.

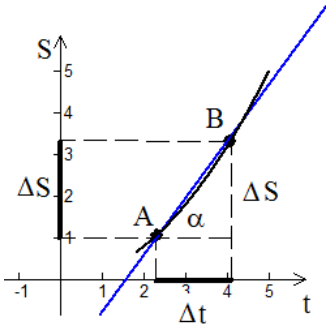
אם גוף נע במהירות קבועה v, אזי בפרק הזמן t הוא עובר מרחק $S = v \cdot t$.

בפרק זמן קטן Δt הוא יעבור מרחק קטן ΔS השווה ל- $\Delta S = v \cdot \Delta t$.

מנוסחה זאת רואים כי $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, כלומר המהירות v מבטאת את <u>קצב שינוי הדרך</u> (בכמה משתנה הדרך ביחידת זמן אחת (כאשר $\Delta t = 1$ נקבל: $v = \Delta S$).

כאשר גוף נע במהירות משתנה, עדיין אפשר לומר, שבכל רגע t יש לגוף מהירות רגעית v המבטאת את <u>קצב שינוי הדרך באותו הרגע</u> (כאשר בוחרים פרק הזמן Δt קטן מאוד).

אפשר לרשום זאת כגבול של המנה $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ כאשר Δt שואף לאפס: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$.



אם נשרטט גרף של פונקציה $S(t)$, נראה כי <u>לשיפוע המשיק</u> לקו הגרף בנקודה מסוימת (ברגע מסוים) <u>יש אותה משמעות</u> כמו <u>לקצב שינוי הפונקציה</u> $S(t)$, שהיא – מהירות באותו הרגע.

מהגרף אפשר לראות את שתי המשמעויות של הנגזרת:

כאשר הדרך S משתנה ב- ΔS בפרק זמן קטן Δt, אזי הנגזרת $S'(t)$:

$$m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{A \to B} (\tan \alpha)$$

א. שווה לשיפוע המשיק לעקומת הגרף של הפונקציה $S(t)$ בנקודה A; וגם

ב. שווה לקצב שינוי הפונקציה S ברגע t (בנקודת ההתחלה A).

ככלל, כאשר מדובר בשינוי של גודל מסוים בזמן, (כמו עלייה או ירידת הטמפרטורה במשך היום, שינוי מפלס המים בבריכה כאשר ממלאים או מרוקנים אותה, האצה או האטה של מכונית לאחר זינוק או בלימה), – קצב השינוי של גודל זה שווה לנגזרת של פונקציה.

עד כה מצאנו את פונקציות הנגזרת של כמה **פונקציות בסיסיות**:

$$(x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,\ ...,\ (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

ואולם, "צורת הקערה" – גרף הפונקציה - יכולה להיות גם מורכבת יותר, לדוגמה:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2,\ y(x) = 3x^2 + 5,\ y(x) = 0.2x^3 - 3x^2 + 1$$

כיצד ניתן לחשב את פונקציות הנגזרת (שיפועי המשיקים לגרף) במקרים אלה, אם יודעים את הנגזרות של פונקציות בסיסיות? ניעזר בכמה כללים פשוטים:

כלל 1 נגזרת של סכום או הפרש הפונקציות

נניח שצריך לחשב נגזרת של סכום (או הפרש) של שתי פונקציות: $f(x) \pm g(x)$.

התוצאה היא סכום (או הפרש) של הנגזרות המתאימות:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (1)$$

דוגמאות

$$[x^2 + x^3]' = 2x + 3x^2$$
$$[x^4 - x^5]' = 4x^3 - 5x^4$$

הוכחה

על-מנת לחשב את הנגזרת של סכום שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ צריך לחשב את התוספת הקטנה לסכום הפונקציות: $\Delta[f(x) + g(x)]$ כאשר לערכו של x מתווספת תוספת קטנה Δx.

על פי הגדרת התוספת: $\Delta[f(x) + g(x)] = [f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]$

נסדר את הביטוי האחרון באופן הבא:

$$\Delta[f(x) + g(x)] = f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)$$

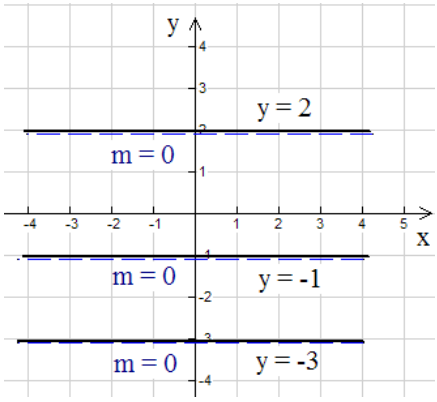
נחלק ב- Δx :

$$\frac{\Delta[f(x)+g(x)]}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

המנות שבביטוי האחרון הופכות לנגזרות כאשר התוספת הקטנה Δx שואפת ל- 0 :

$$[f(x)+g(x)]'=f(x)'+g(x)'$$ **מ.ש.ל.**

כלל 2 נגזרת של פונקציה קבועה (f(x) = k)



גרף הפונקציה $y = k$, כאשר k הוא מספר קבוע, הוא ישר המקביל לציר- x, ששיפועו הוא אפס.

לכן, **הנגזרת של מספר קבוע שווה לאפס** :

$$(k)' = 0 \qquad (2)$$

דוגמאות: $(5)' = 0,\ (-2.5)' = 0,\ \left(-\frac{2}{7}\right)' = 0$

הוכחה

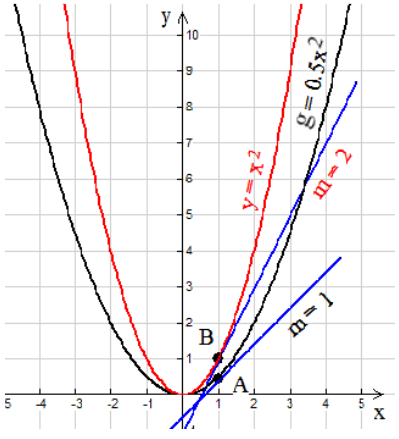
$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0 \Rightarrow (k)' = 0$$

התבוננו בגרפים המייצגים את שלוש הפונקציות הקבועות : $y = 2$, $y = -1$ ו- $y = -3$.

רואים שמשיקים לכל גרפים הם ישרים אופקיים, כלומר, בעלי שיפוע $m = 0$,

מה שתואם למסקנה שקיבלנו אודות ערך הנגזרת.

כלל 3 נגזרת של מכפלת הפונקציה במספר קבוע



נתבונן בגרפים של שתי הפונקציות :

$y = x^2$ ו- $g = 0.5x^2$.

אפשר לראות ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה y(x) בנקודה $x = 1$ גדול פי- 2 מזה של הפונקציה g(x) .

אפשר להוכיח שזה מתקיים עבור כל נקודה x בתחום ההגדרה של שתי הפונקציות, כלומר :

$$(x^2)' = 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)'$$

מסקנה זו היא כללית:

נגזרת של מכפלת הפונקציה במספר קבוע שווה למכפלת המספר בנגזרת הפונקציה:

$$(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x) \qquad (3)$$

הוכחה

נחשב את התוספת לפונקציה $\Delta(k\cdot f(x))$ כאשר ל- x מתווספת תוספת קטנה Δx:

$$\Delta f(x) = \Delta(k\cdot f(x)) = k\cdot f(x+\Delta x) - k\cdot f(x) = k\cdot[f(x+\Delta x) - f(x)]$$

כדי לקבל נגזרת, צריך לחלק את Δf ב- Δx ולחשב גבול כאשר Δx שואף ל- 0:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\cdot[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = k\cdot\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = k\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = k\cdot[f(x)]' \qquad \textbf{מ.ש.ל.}$$

דוגמאות:

$$(5x^2)' = 5\cdot(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$$

$$(4x^3)' = 4\cdot(x^3)' = 4\cdot 3x^2 = 12x^2$$

בהתבסס על הכללים (1) – (3) אפשר לחשב נגזרות של כל <u>פונקציית פולינום</u> (רב-איבר)

- סכום של איברים שכל אחד מהם הוא חזקה של x עם מקדם מספרי.

דוגמה 1

מצאו נגזרת של הפונקציה $f(x) = 5x^2 - 3$.

◀ על פי כלל 3 וכלל 2:

$$f'(x) = (5x^2)' - (3)' =$$

על פי הנגזרת של פונקציה בסיסית:

$$= 5\cdot(x^2)' - 0 =$$

$$= 5\cdot 2x = 10x$$

דוגמה 2

מצאו נגזרת של פולינום (רב-איבר):

$$y(x) = 7x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 10$$

◀ על פי כלל 1 (נגזרת של סכום):

$$y' = (7x^5)' + (3x^4)' - (x^3)' + (2x^2)' - (5x)' + (10)'$$

על פי הכללים 2 ו- 3 :

$$y' = 7(x^5)' + 3(x^4)' - (x^3)' + 2(x^2)' - 5(x)' =$$

(נשתמש בנוסחת הנגזרת של פונקציה החזקה : $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$)

$$= 7\cdot 5x^4 + 3\cdot 4x^3 - 3x^2 + 2\cdot 2x - 5 = \underline{35x^4 + 12x^3 - 3x^2 + 4x - 5}$$

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

95. מצאו את נגזרת הפונקציה :

א) $f(x) = 3x$ ב) $f(x) = -5x$ ג) $f(x) = 1 - 3x$

ד) $f(x) = 0.3x + 10$ ה) $f(x) = 4 - \frac{x}{3}$ ו) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$

ז) $f(x) = 13x + 26$ ח) $f(x) = 8x - 16$ ט) $f(x) = -x + 4$

96. מצאו את נגזרת הפונקציה :

א) $f(x) = x^2$ ב) $f(x) = x^2 - 5$ ג) $f(x) = 3x^2$

ד) $f(x) = -17x^2$ ה) $f(x) = -4x^3$ ו) $f(x) = 0.5x^3$

ז) $f(x) = 13x^2 + 26$ ח) $f(x) = 8x^2 - 16$ ט) $f(x) = -x^4 + 4x$

97. מצאו את נגזרת הפונקציה :

א) $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$ ב) $f(x) = 5x^2 + 6x - 7$ ג) $f(x) = x^4 + 2x^2$

ד) $f(x) = x^5 - 3x^2$ ה) $f(x) = x^3 + 5x$ ו) $f(x) = -2x^3 + 18x$

ז) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ ח) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x - 5$

98. מצאו את נגזרת הפונקציה :

א) $f(x) = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$ ב) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 7$

ג) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$ ד) $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$

99. מצאו את ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ בנקודות הנתונות :

א) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 2$

ב) $f(x) = (x^2 - 1)(2x - 3)$, $x_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{6}$

100. פתרו משוואה $f'(x) = 0$, אם נתון:

א) $f(x) = 2x^2 - x$ ב) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$

ג) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1.5x^2 - 4x$ ד) $f(x) = 2x - 5x^2$

101. פתרו את האי-שוויון $f'(x) < 0$ אם נתון:

א) $f(x) = 4x - 3x^2$ ב) $f(x) = x^3 + 1.5x^2$

ג) $f(x) = x^2 - 5x$ ד) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

102. א. בנו את גרף הפונקציה $f(x) = (x-2)^2 + 1$ ואת גרף הפונקציה הנגזרת באותה מערכת צירים. מצאו באמצעות הגרף, את ערך הנגזרת בנקודת המינימום של הפונקציה.

ב. הקישו בקישור, ובדקו את עצמכם באמצעות התוכנה שתיפתח:

הקישו בקישור של כל תרגיל, והוא ייפתח בתוכנה אינטראקטיבית בה ניתן להציג ולחקור את שני הגרפים – של הפונקציה ושל נגזרתה. הקישו ב"תשובה", בחרו את הפונקציה ואת נגזרתה, העבירה אותה לחלון עריכה, וחקרו את שני הגרפים שיוצגו.

ג. מצאו באמצעות הגרפים את ערך הנגזרת בנקודת המינימום של הפונקציה.

הערה: בחלון עריכה של התוכנה אפשר לרשום באמצעות מקשי העריכה בצד שמאל של המסך כל פונקציה שהיא, ולהציג את הגרף שלה על ידי ההקשה בצלמית הגרף. כדי להציג גרפים של שתי פונקציות, יש לרשום אותן בשתי שורות המופרדות באמצעות הסימן ";" – על המקש של אות "ף" במקלדת.

103. א. מצאו באופן אלגברי את שיעורי x של הנקודות שבהן ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ שווה ל- 0;

ב. הקישו בקישור ליד כל פונקציה והתבוננו בגרפים של $f(x)$ ושל- $f'(x)$ באותה מערכת צירים;

ג. מצאו על הגרף של $f'(x)$ את הנקודות שבהן ערכי הנגזרת מתאפסים;

ד. מהם סוגי הנקודות על גרף הפונקציה $f(x)$, שבהן מתאפסים ערכי הנגזרת?

א) $f(x) = x^3 - 2x$ ב) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

ג) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$ ד) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$

ה) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ ו) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 5$

הערה: כדי לראות את הגרף "בהגדלה" הציבו תחומי x ו- y קטנים יותר.

2.3 נגזרת של מכפלה ומנת שתי פונקציות

כלל 4 **נגזרת של מכפלת שתי פונקציות f(x) ו- g(x) שווה לסכום המכפלות של פונקציה ראשונה בנגזרת של פונקציה שנייה, ושל פונקציה שנייה בנגזרת של פונקציה ראשונה:**

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x) \qquad (4)$$

נבדוק את נכונות הכלל על דוגמה:

דוגמה 1 מצאו מכפלת שתי הפונקציות: $f(x) = 3x^2 - 5,\ g(x) = 2x + 7$:

נחשב את אגף שמאל:

$$[(3x^2 - 5)(2x + 7)]' = [6x^3 + 21x^2 - 10x - 35]' = 3\cdot 6x^2 + 2\cdot 21x - 10 =$$

$$= \underline{18x^2 + 42x - 10}$$

נחשב את אגף ימין:

$$f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x) = (3x^2 - 5)\cdot(2x + 7)' + (3x^2 - 5)'\cdot(2x + 7) =$$

$$= (3x^2 - 5)\cdot 2 + (6x)\cdot(2x + 7) = 6x^2 - 10 + 12x^2 + 42x =$$

$$= \underline{18x^2 + 42x - 10}$$

נוכיח כלל זה עבור שתי פונקציות כלשהן, שאותן נרשום בקצרה: $f = f(x)$ ו- $g = g(x)$.

תחילה נמצא את תוספת המכפלה $\Delta(f\cdot g)$ בנקודה x_0 איזושהי:

$$\Delta(f\cdot g) = f(x_0 + \Delta x)\cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\cdot g(x_0) =$$

נשתמש בהגדרת התוספת לפונקציה: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ונרשום:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta f\ ,\ \ g(x_0+\Delta x) = g(x_0) + \Delta g$$

$$= (f(x_0) + \Delta f)\cdot(g(x_0)+\Delta g) - f(x_0)\cdot g(x_0) =$$

$$= f\cdot g + f\cdot\Delta g + g\cdot\Delta f + \Delta f\cdot\Delta g - f\cdot g = \ f\cdot\Delta g + g\cdot\Delta f + \Delta f\cdot\Delta g$$

נחלק ב- Δx:

$$\frac{\Delta(f\bullet g)}{\Delta x} = \frac{f\bullet\Delta g + g\bullet\Delta f + \Delta f\bullet\Delta g}{\Delta x} = f\bullet\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\bullet\frac{\Delta f}{\Delta x} + \Delta f\bullet\frac{\Delta g}{\Delta x}$$

כדי לחשב נגזרת, יש לחשב גבול של ביטוי זה כאשר Δx שואף לאפס:

$$(f\bullet g)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(f\bullet\frac{\Delta g}{\Delta x} + g\bullet\frac{\Delta f}{\Delta x} + \Delta f\bullet\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)$$

שני האיברים הראשונים מהווים מכפלות $f\cdot g'$ ו- $g\cdot f'$, ואילו השלישי מכיל שני גורמים: g', שהוא מספר סופי (השווה לנגזרת של g בנקודה x_0), ו- Δf, תוספת לפונקציה $f(x)$, כאשר x שואף לנקודה x_0. תוספת זו שואפת ל- 0, לכן כל האיבר השלישי גם הוא שואף לאפס.

לבסוף קיבלנו את הנדרש: $\underline{(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g}$ **מ.ש.ל.**

הערה 1 באמצעות נוסחה זאת אפשר להוכיח את **כלל 3** - נגזרת של מכפלת קבוע בפונקציה: $(k\cdot f)' = k\cdot f' + k'\cdot f = k\cdot f'$, מכיוון ש- $k' = 0$.

הערה 2 באמצעות נוסחה זו אפשר להראות את דרך ההוכחה של נוסחה לנגזרת של חזקה:

א. הוכחנו כי $(x^2)' = 2x$.

ב. $x^3 = x\cdot x^2 \Leftarrow (x^3)' = (x\cdot x^2)' = x\cdot 2x + 1\cdot x^2 = 3x^2 = 3x^{3-1}$

ג. $(x^4)' = (x\cdot x^3)' = x\cdot 3x^2 + 1\cdot x^3 = 3x^2 = 4x^3 = 4x^{4-1}$

.....

כך אפשר להמשיך לחזקות עם מעריכים טבעיים גדולים יותר.

על מנת לחשב נגזרת של **חזקה עם מעריך שלילי**, צריך לדעת לחשב מנת שתי פונקציות (הרי $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$).

נוכיח תחילה נוסחה לנגזרת של $\frac{1}{f(x)}$: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

הוכחה

א) נחשב את התוספת לפונקציה $\frac{1}{f}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{f(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{f(x_0)} = \frac{f(x_0) - f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)\cdot f(x_0+\Delta x)} = \frac{-\Delta f}{f(x_0)\cdot f(x_0+\Delta x)}$$

נחלק ב- Δx:

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{f}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta f}{\Delta x}}{f(x_0)\cdot f(x_0+\Delta x)}$$

נחשב גבול כאשר Δx שואף לאפס:

$$\Delta x \to 0:\ \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f',\ \Delta f \to 0,\ \frac{\Delta\left(\frac{1}{f}\right)}{\Delta x} \to \frac{-f'}{f\cdot f} = -\frac{f'}{f^2},\ \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

בעזרת נוסחה זו נוכיח שכלל חישוב החזקה ($(x^n)' = nx^{n-1}$) נכון גם במקרה של חזקה שלילית:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\cdot x^{(n-1-2n)} = -n\cdot x^{-n-1}$$

דוגמה 1 מצאו נגזרת הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$ ◀

דוגמה 2 מצאו נגזרת הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

$$f'(x) = (x^{-5})' = -5\cdot x^{-5-1} = -5x^{-6}$$ ◀

דוגמה 3 מצאו נגזרת הפונקציה $u(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$.

$$u'(x) = \left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = (3x^7)' - 5\cdot(x^{-3})' = 3\cdot 7x^6 - 5\cdot(-3)\cdot x^{-3-1} = 21x^6 + \frac{15}{x^4}$$ ◀

נגזרת של שורש ריבועי $f(x) = \sqrt{x}$.

הוכחנו קודם שנוסחה לנגזרת של פונקציית חזקה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה למעריכים שלמים (חיוביים ושליליים).

אם להניח כי היא נכונה גם למעריכים שברים, אז נקבל עבור $n = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

קיבלנו נוסחה: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

הנוסחה היא נכונה, אולם הפיתוח התבסס על ההשערה שאת נכונותה יש להוכיח.

נביא כאן פיתוח אחר של נוסחה זו, שאינו מתבסס על הנחות נוספות:

נשתמש בהגדרה של שורש ריבועי: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} = x$.

ביטוי זה הוא שוויון בין שתי פונקציות: $f_1(x) = x$ ו- $f_2(x) = \sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

אם $f_1(x) = f_2(x)$, אזי גם הנגזרות שוות: $f_1'(x) = f_2'(x)$.

נחשב אותן: $f_1'(x) = x' = 1$

את הנגזרת השנייה מחשבים על פי הכלל של נגזרת מכפלה:

$$f_2'(x) = \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\right)' = \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x} = 2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$$

כלומר: $2\cdot\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = 1$

מכאן מקבלים את המבוקש: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **מ.ש.ל.**

כלל 5 **נגזרת של מנת שתי פונקציות f(x) ו- g(x) שווה ל –** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

הוכחה

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' + f'\cdot\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{f\cdot g'}{g^2} = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

שני הכללים: נגזרת של מכפלה ומנת שתי פונקציות – מאפשרים לחשב נגזרות של פונקציות רבות.

דוגמה 4 מצאו נגזרת הפונקציה $v(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$.

$$v' = \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(x^3+1) - x^2\cdot(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{2x\cdot(x^3+1) - x^2\cdot((x^3)'+1')}{(x^3+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^4 + 2x - x^2\cdot(3x^2+0)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3+1)^2}.$$

◀

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

מצאו נגזרת הפונקציה:

104. א) $f(x) = x^2 + x^3$ ב) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$
ג) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ד) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

105. א) $f(x) = x^3(4 + 2x - x^2)$ ב) $f(x) = \sqrt{x}\cdot(2x^2 - x)$
ג) $f(x) = x^2(3x + x^3)$ ד) $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$

106. א) $f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$ ב) $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$
ג) $f(x) = \frac{3x-2}{5x+8}$ ד) $f(x) = \frac{3-4x}{x^2}$

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

107. א) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 5$ ב) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x}$

ג) $f(x) = x^7 - 4x^5 + 2x - 1$ ד) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{34}{x^3} + 1$

108. מצאו את ערכי הנגזרת של $f(x)$ בנקודות הבאות:

א) $f(x) = x^2 - 3x,\ x = -\frac{1}{2},\ x = 2$ ב) $f(x) = x - 4\sqrt{x},\ x = 0.01,\ x = 4$

ג) $f(x) = x - \frac{1}{x},\ x = \sqrt{2},\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ד) $f(x) = \frac{3 - x}{2 + x},\ x = -3,\ x = 0$

108. פתרו משוואה $f'(x) = 0$, כאשר:

א) $f(x) = 2x^2 - x$ ב) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$

ג) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1.5x^2 - 4x$ ד) $f(x) = 2x - 5x^2$.

109. פתרו את האי שוויון $f'(x) < 0$ אם נתון:

א) $f(x) = 4x - 3x^2$ ב) $f(x) = x^3 + 1.5x^2$

ג) $f(x) = x^2 - 5x$ ד) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

110. מצאו את נגזרת הפונקציה:

א) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 + 4x^5}$ ב) $f(x) = \left(\frac{3}{x} + x^2\right)\cdot\left(2 - \sqrt{x}\right)$

ג) $f(x) = \frac{5 - 2x^6}{1 - x^3}$ ד) $f(x) = \sqrt{x}\left(3x^5 - x\right)$

111. מצאו ערכי x שעבורם נגזרת הפונקציה שווה לאפס:

א) $f(x) = x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 5x$ ב) $f(x) = 2x^4 - x^8$

ג) $f(x) = x^4 + 4x$ ד) $f(x) = x^4 - 12x^2$

112. פתרו את האי שוויון $f'(x) < 0$ אם נתון:

א) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$ ב) $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$

ג) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$ ד) $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^3$

113. רשמו פונקציה שנגזרתה היא:

א) $2x + 3$ ב) $16x^3 - 0.4$ ג) $8x - 2$ ד) $f(x) = 9x^2 - \frac{1}{2}$

תרגילים אינטראקטיביים

תרגיל 2.4 נתונה פונקציה: $f(x)=x^5+4x+8$

חשבו את הנגזרת $f'(x)$.

תרגיל 2.5 נתונה הפונקציה: $f(x)=1296x^4+18x^9$,

חשבו את ערכי הנגזרת שלה בנקודות: $x_1=-2$ ו- $x_2=3$.

תרגיל 2.6 מצאו את הנקודות שבהן נגזרתה

של הפונקציה $f(x)=3x^3-\frac{1}{9}\cdot x^2$ שווה ל- 7.

תרגיל 2.7 נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(5x^7+4x^2\right)\left(4x^3-8x^5\right)$

חשבו את הנגזרת: $f'(x)$.

תרגיל 2.8 נתון כי ל- x מסוים ערך הפונקציה הוא $f(x)=7$,

ערך נגזרתה הוא $f'(x)=4$, וערך הנגזרת של מכפלת

שתי הפונקציות הוא: $\left(x^4f(x)\right)'=0$. מצאו את x.

תרגיל 2.9 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^4}{x^8+6}$

חשבו את נגזרתה: $f'(x)$.

תרגיל 2.10 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^5+6x+4}{x^4-7}$

חשבו את $f'(1)$ ואת $f'(-1)$.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)

תרגיל 2.4 נתונה פונקציה: $f(x)=x^5+4x+8$

חשבו את הנגזרת $f'(x)$.

תרגיל 2.5 נתונה הפונקציה: $f(x)=1296x^4+18x^9$,

חשבו את ערכי הנגזרת שלה בנקודות: $x_1=-2$ ו- $x_2=3$.

תרגיל 2.6 מצאו את הנקודות שבהן נגזרתה

של הפונקציה $f(x)=3x^3-\frac{1}{9}\cdot x^2$ שווה ל- 7.

תרגיל 2.7 נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(5x^7+4x^2\right)\left(4x^3-8x^5\right)$

חשבו את הנגזרת: $f'(x)$.

תרגיל 2.8 נתון כי ל- x מסוים ערך הפונקציה הוא $f(x)=7$,

ערך נגזרתה הוא $f'(x)=4$, וערך הנגזרת של מכפלת

שתי הפונקציות הוא: $\left(x^4 f(x)\right)'=0$. מצאו את x.

תרגיל 2.9 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^4}{x^8+6}$

חשבו את נגזרתה: $f'(x)$.

תרגיל 2.10 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^5+6x+4}{x^4-7}$

חשבו את $f'(1)$ ואת $f'(-1)$.

2.4 נגזרת של פונקציה מורכבת

בסעיפים קודמים למדתם לחשב נגזרת של פונקציית חזקה, ובפרט נגזרת של רב-איבר המכיל סכום או הפרש של חזקות. אולם, אם ברצוננו לחשב, לדוגמה, נגזרת של פונקציה $f(x) = (2x + 5)^{100}$, נצטרך לבצע פעולות רבות מאוד: תחילה להציג את הפונקציה כרב-איבר, אחר-כך לגזור את 101 איבריו.

אפשר לפשט פתרון בעיה זו ובעיות אחרות באמצעות **כלל לחישוב נגזרת של פונקציה מורכבת**.

הגדרה פונקציה מורכבת היא פונקציה $f(g)$ של משתנה g שהוא בעצמו מהווה פונקציה של משתנה אחר $g = g(x)$. אם כן, אפשר לרשום: $f(x) = f(g(x))$.

לפונקציה $g(x)$ קוראים "פונקציה פנימית", ול- $f(g)$ – "פונקציה חיצונית".

דוגמאות:

א. $f(x) = (2x + 5)^{100}$. אפשר להציג פונקציה זו כפונקציית חזקה g^{100} (פונקציה חיצונית), כאשר g (פונקציה פנימית) היא פונקציה של x: $g(x) = 2x + 5$

ב. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$. אפשר לרשום את f כפונקציה מורכבת:

$$f(x) = \sqrt{g(x)},\ g(x) = 3x^2 + 1$$

הכלל לחישוב הנגזרת של פונקציה מורכבת $f(x) = g(h(x))$ הוא:

$$\mathbf{f'(x) = g'(h)\cdot h'(x)}$$

הנמקה

בסעיף 8.2 ראינו כי משמעות הנגזרת היא קצב שינוי של פונקציה, או במילים אחרות, יחס של תוספת לפונקציה Δf לתוספת של משתנה בלתי תלוי Δx.

במקרה של פונקציה מורכבת, השינוי ב- x גורם תחילה לשינוי של "פונקציה פנימית", ובעקבות כך - לשינוי של "פונקציה חיצונית".

נניח שבנקודה מסוימת A תוספת קטנה Δx גורמת לתוספת כפולה לגודל הפונקציה הפנימית: $\Delta g = 2\cdot\Delta x$,

והיא מצדה, גורמת לתוספת כפולה לגודל הפונקציה החיצונית:

$$\Delta f = 2\cdot\Delta g$$

ברור, כי בסופו של דבר, לפונקציה f יתווסף גודל

$$\Delta f = 2\cdot\Delta g = 2\cdot 2\cdot\Delta x = 4\cdot\Delta x,$$

כלומר קצב שינוי של f ביחס ל- x שווה למכפלה של קצבי שינוי הפונקציה הפנימית והחיצונית.

הוכחה

א. נתון: $f(x) = g(h(x))$. עלינו לחשב גבול של המנה $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ כאשר Δx שואף לאפס.

ב. נרכיב תוספת לפונקציה: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$.

ואולם, f אינה תלויה ישירות ב- x: שינוי ב- x (מ- x ל- $x+\Delta$) גורם ישירות לשינוי ערכה של h (מ- $h(x)$ ל- $h(x+\Delta x)$), ובאמצעותה – לשינוי של $f = g(h)$.

נסמן את השינוי ב- h ב- $\Delta h = h(x+\Delta x) - h(x)$, ופתח את הביטוי ל- Δf:

$$\Delta f = g(h(x+\Delta x)) - g(h(x)) = g(h) + \Delta g - g(h) = \Delta g$$

ג. עלינו לחשב את המנה $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, אשר עלפי התוצאה האחרונה שווה ל- $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

מכיוון ש- Δg אינה תלויה ב- x ישירות, אלא באמצעות $h(x)$, נפתח ביטוי אחרון באופן הבא (נכפיל ונחלק ב- Δh):

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta h}\cdot\frac{\Delta h}{\Delta x}$$

ד. כאשר Δx שואף לאפס, השבר האחרון בביטוי זה שואף לנגזרת $h'(x)$, והשבר הראשון שואף לנגזרת $g'(h)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = g'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta h\to 0}\left(\frac{\Delta g}{\Delta h}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta h}{\Delta x}\right) = g'(h)\cdot h'(x)$$

מ.ש.ל.

דוגמה 1 מצאו נגזרת של פונקציה $f(x) = \sqrt{x-5}$.

$$f(x) = \sqrt{g(x)},\ g(x) = x-5.\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}\cdot(x-5)' = \frac{1}{2\sqrt{x-5}}$$ ◀

דוגמה 2 מצאו נגזרת של פונקציה $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$

$$f = \sqrt{g},\ g(x) = 3x^2+1,\ f'(x) = \left(\sqrt{g}\right)'\cdot\left(3x^2+1\right)' = \frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot 6x = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$ ◀

דוגמה 3 מצאו נגזרת של פונקציה $f(x) = (2x + 5)^{100}$.

◀ $f = g^{100},\ g = 2x + 5,\ f'(x) = 100g^{99}\cdot(2x+5)' = 200g^{99} = \underline{200\cdot(2x+5)^{99}}$

דוגמה 4 מצאו נגזרת של פונקציה

◀ $f'(x) = (2x^2 + 3x + 4)\cdot\left(\sqrt{3x - 5}\right)' + (2x^2 + 3x + 4)'\cdot\sqrt{3x - 5}$;

$$\left(\sqrt{3x - 5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x - 5}}\cdot(3x - 5)' = \frac{3}{2\sqrt{3x - 5}};$$

$$(2x^2 + 3x + 4)' = 4x + 3;$$

$$f'(x) = \frac{3\cdot(2x^2 + 3x + 4)}{2\sqrt{3x - 5}} + (4x + 3)\cdot\sqrt{3x - 5}\ .$$

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

מצאו את נגזרת הפונקציה:

114. א) $f(x) = (2x - 7)^8$ ב) $f(x) = \dfrac{1}{(5x + 1)^2}$

ג) $f(x) = (9x + 5)^4$ ד) $f(x) = \dfrac{1}{(6x - 1)^5}$

115. א) $f(x) = \left(3 - \dfrac{x}{2}\right)^{-9}$ ב) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}x - 7\right)^8 - (1 - 2x)^4$

ג) $f(x) = (4 - 1.5x)^{10}$ ד) $f(x) = (5x - 2)^{13} - (4x + 7)^{-6}$

116. א) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)^{17}$ ב) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5}$

ג) $f(x) = \sqrt{1 - x^4} + \dfrac{1}{x^2 + 3}$ ד) $f(x) = (3 - x^3)^5 + \sqrt{2x - 7}$

117. עבור הפונקציה $g(x)$ מצאו את הפונקציה f שתקיים $f(g(x)) = x$:

א) $g(x) = 2x$ ב) $g(x) = 3x + 2$

ג) $g(x) = x^2 + 1,\ x \le 0$ ד) $g(x) = \sqrt{x}$

118. מצאו את $f'(1)$ אם נתון:

א) $f(x) = (x - 1)^8(2 - x)^7$ ב) $f(x) = (2x - 1)^5(1 + x)^4$

ג) $f(x) = \sqrt{2 - x}(3 - 2x)^8$ ד) $f(x) = (5x - 4)^6 \cdot \sqrt{3x - 2}$

119. האם גרף הפונקציה $f(x) = 3x + 1$ חותך את הגרף של הפונקציה הנגזרת של $f(x) = 3x + 1$?

הדרכה: פתרו תחילה בדרך אלגברית, הקישו בקישור זה, ובנו באמצעות התוכנה גרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. בדקו את תשובתיכם

120. עבור אלו ערכים של x ערך הנגזרת של הפונקציה $f(x) = (x - 3)^5(2 + 5x)^6$ שווה ל- 0 ?

121. מצאו את נגזרת הפונקציה:

א) $f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x}{x + 1}$ ב) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + x^3 + x}{x - 1}$

122. מצאו, עבור אלו ערכים של x נגזרת הפונקציה חיובית:

הדרכה: פתרו בדרך אלגברית, הקישו בקישור, בנו את גרף הנגזרת ובדקו את תשובתכם.

א) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ ב) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$

ג) $f(x) = (x + 2)^2\sqrt{x}$ ד) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$

123. מצאו, עבור אלו ערכים של x נגזרת הפונקציה שלילית:

א) $f(x) = (5 - 3x)^4(3x - 1)^3$ ב) $f(x) = (2x - 3)^2(3 - 2x)^3$

ג) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{1 - 2x}$ ד) $f(x) = \frac{3x^3}{1 - 3x}$

124. מצאו את נגזרת הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, כאשר $x < 2$ ו- $x > 3$.

תרגילים אינטראקטיביים

תרגיל 3.1 נתונה הפונקציה המורכבת: $f(x) = 2\sqrt[4]{x^7} - \frac{1}{\sqrt[11]{8x^6}}$

חשבו את נגזרתה.

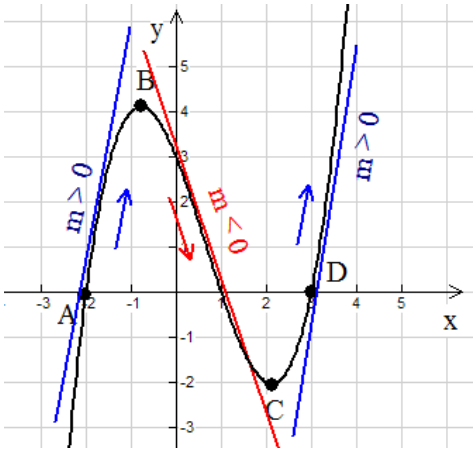
תרגיל 3.2 נתונה הפונקציה המורכבת: $f(x) = \frac{7x + 6}{\sqrt{2x + 1}}$

חשבו את נגזרתה.

2.5 שימושי הנגזרת בחקירת פונקציות. תחומי עלייה וירידה

כשיודיעם את הפונקציה הנגזרת אפשר למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה ואת נקודות המינימום והמקסימום שלה.

התבוננו בגרף של פונקציה מסוימת:

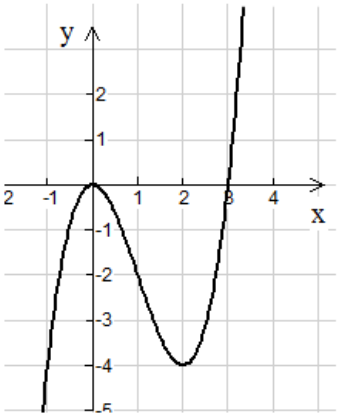


רואים שבתחומי העלייה ($x < x_B$ ו- $x > x_C$) שיפוע המשיק לגרף הוא חיובי, ובאזור הירידה ($x_B < x < x_C$) הוא שלילי.

אפשר להסיק אפוא, כי:

אם בקטע מסוים נגזרת הפונקציה חיובית ($f'(x) > 0$), הפונקציה עולה בקטע זה;

ואם בקטע מסוים הנגזרת שלילית ($f'(x) < 0$), הפונקציה בקטע זה יורדת.



דוגמה 1

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

◀ נחשב את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

בתחום העלייה הנגזרת צריכה להיות חיובית:

$$3x^2 - 6x > 0$$

אי שוויון זה שקול לאי שוויון: $x^2 - 2x > 0$.

נשרטט גרף של אגף שמאל: $y = x^2 - 2x$,

ונפתור באמצעותו את האי שוויון:

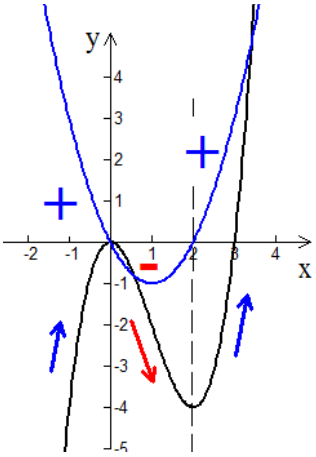
$$x < 0,\ x > 2$$

בתחומים אלה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2$ עולה,

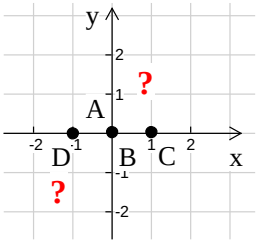
ובתחום שבו הנגזרת היא שלילית: $3x^2 - 6x < 0$,

$$0 < x < 2$$

הפונקציה $f(x)$ יורדת.



דוגמה 2 בנו סקיצת גרף של הפונקציה $f(x) = x - x^3$.



◀ נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים:

א. נקודות החתוך עם ציר y:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0,\ A(0, 0)$$

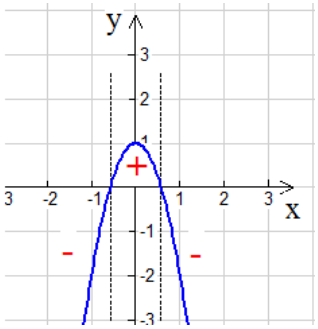
ב. נקודות חיתוך עם ציר x ($y = 0$): $x - x^3 = 0$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1 \Rightarrow B(0, 0),\ C(1, 0),\ D(-1, 0)$$

ג. על-מנת לדעת את צורת הגרף יש צורך במידע נוסף: נקודות מקסימום ומינימום של f ותחומי העלייה והירידה. את שיטת המציאה של נקודות מקסימום ומינימום נלמד בסעיף הבא.

ד. כעת נמצא את תחומי העלייה והירידה באמצעות הנגזרת:

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

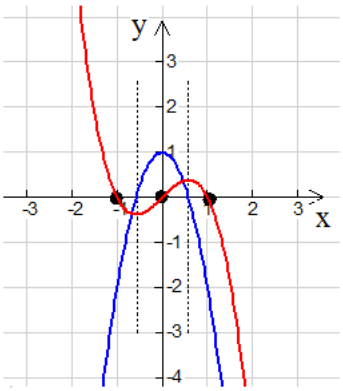


נמצא את התחומים שבהם הנגזרת חיובית (תחום העלייה של הפונקציה) או שלילית (תחום הירידה).

נשרטט גרף של פונקציית הנגזרת (פרבולה).

בגרף אפשר לראות כי הנגזרת חיובית בין הנקודות שבהן הגרף חותך את ציר ה- x, ושלילית בתחומים שמימין ומשמאל לתחום זה. נקודות החיתוך עם ציר x הינן פתרונות המשוואה:

$$1 - 3x^2 = 0,\ 3x^2 = 1,\ x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



לכן, תחום העלייה של $f(x)$ הוא: $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

ותחומי הירידה הם:

$$y'(x) < 0,\ 1 - 3x^2 < 0,\ x < -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

באמצעות המחשבון נמצא את ערכי גבולות התחומים:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 \approx 0.6 .$$

נשלב את המידע שהסקנו ונשרטט את סקיצת הגרף:

דוגמה 3

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x - 5}$.

◀ א. בשלב הראשון (ובמיוחד כאשר בפונקציה מופיע שורש!) מוצאים את תחום ההגדרה:

$$\underline{x \geq 5}, \quad x - 5 \geq 0.$$

ב. נחשב את הנגזרת על פי כלל חישוב הנגזרת של פונקציה מורכבת:

$$f(x) = f(g(x)), \quad f(g) = \sqrt{g}, \quad g(x) = x - 5.$$

$$f'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{x - 5}}, \quad g'(x) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 5}}.$$

כיוון ששורש הוא אינו שלילי על פי הגדרתו, מקבלים: $f'(x) > 0$.

מכאן מסיקים כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{x - 5}$ <u>עולה בכל תחום ההגדרה</u>.

נתבונן בגרף הפונקציה: הוא מתקבל מהגרף הבסיסי $f(x) = \sqrt{x}$ על ידי הזזה ל- 5 יחידות ימינה. בגרף רואים שהפונקציה אכן עולה בכל התחום.

דוגמה 4

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{5 - x}$

◀ א. בשלב הראשון (ובמיוחד כאשר בפונקציה מופיע שורש!) מוצאים את תחום ההגדרה:

$$\underline{x \leq 5}, \quad 5 - x \geq 0.$$

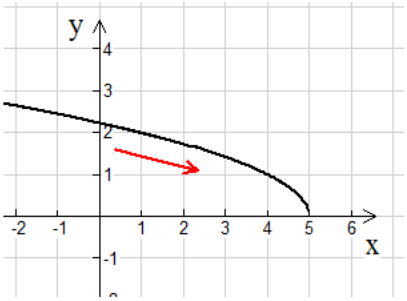
ב. נחשב את הנגזרת על פי כלל חישוב הנגזרת של פונקציה מורכבת:

$$f(x) = f(g(x)), \quad f(g) = \sqrt{g}, \quad g(x) = 5 - x.$$

$$f'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{5 - x}}, \quad g'(x) = -1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{5 - x}} < 0.$$

כיוון ששורש הוא אינו שלילי על פי הגדרתו, מקבלים: $f'(x) < 0$, מכאן מסיקים כי הפונקציה $f(x) = \sqrt{5 - x}$ <u>יורדת בכל תחום ההגדרה</u>.

נתבונן בגרף הפונקציה: מהגרף רואים שהפונקציה אכן יורדת בכל התחום.



דוגמה 5

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$.

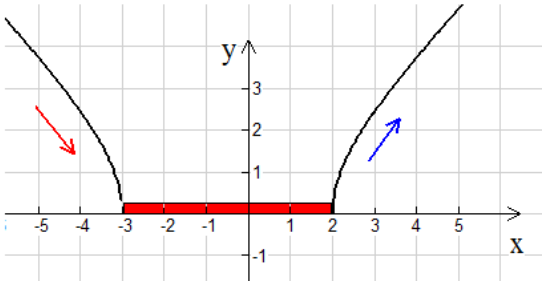
◀ א. בשלב הראשון (ובמיוחד כאשר בפונקציה מופיע שורש!) מוצאים את תחום ההגדרה: $x^2+x-6\geq 0,\ (x-2)(x+3)\geq 0,\ x\geq 0$ או $x\leq -3$

ב. נחשב את הנגזרת על פי כלל חישוב הנגזרת של פונקציה מורכבת:

$$f(x)=\sqrt{g},\ g=x^2+x-6\ ,\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g}}\cdot(2x+1)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-6}}$$

$$f'(x)>0:\quad 2\sqrt{x^2+x-6}>0,\ 2x+1>0,\ x>-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)<0:\quad 2\sqrt{x^2+x-6}>0,\ 2x+1<0,\ x<-\frac{1}{2}$$



איחוד של תחום ההגדרה ותחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת נותן את תחום העלייה: $x\geq 2$

והירידה: $x\leq -3$.

דוגמה 6

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)=(3x-5)\cdot\sqrt{x+2}$.

◀ א. מוצאים את תחום ההגדרה: $\underline{x\geq -2}$,$x+2\geq 0$.

ב. מחשבים את הנגזרת:

על פי כללי הנגזרת של מכפלה ושל פונקציה מורכבת נקבל:

$$f'(x)=(3x-5)\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)'+(3x-5)'\cdot\sqrt{x+2}=\frac{3x-5}{2\sqrt{x+2}}+3\sqrt{x+2}$$

מוצאים, עבור אלו ערכים של x הנגזרת חיובית או שלילית:

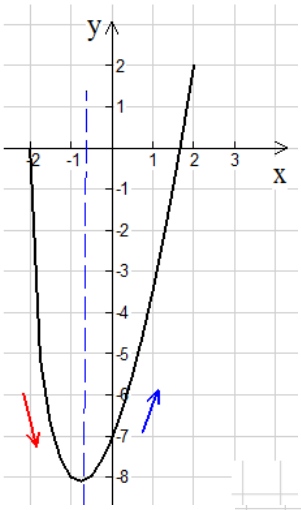
$$\frac{3x-5}{2\sqrt{x+2}}+3\sqrt{x+2}>0,\quad \frac{3x-5}{2\sqrt{x+2}}>-3\sqrt{x+2}$$

נכפיל את שני האגפים של האי שוויון ב- $2\sqrt{x+2}$ (כיוון ששורש אינו שלילי, סימן של האי שוויון לא משתנה):

$$3x-5>-6\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)^2=-6(x+2)=-6x-12,\ 3x-5+6x+12>0$$

$$9x+7>0,\ x>-\frac{7}{9}$$

באופן דומה נמצא את תחום הירידה:



$$f(x) < 0,\ 3x - 5 < -6\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = -6\cdot(x+2) = -6x - 12,$$
$$3x - 5 < -6x - 12,\ 9x + 7 < 0,\ x < -\frac{7}{9}.$$

מתבוננים בגרף הפונקציה ומוודאים שהנקודה $x = -\frac{7}{9}$

אכן מחלקת את ציר ה- x לשניים:

לירידה: $-2 \leqslant x < -\frac{7}{9}$

ולעלייה: $x > -\frac{7}{9}$.

דוגמה 7

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = \left(x^2-3x-1\right)\cdot\sqrt{x+2}$.

◀ א. מוצאים תחום הגדרה: $x + 2 \geq 0,\ \underline{x \geq -2}$.

ב. מחשבים את הנגזרת. על פי כללי הנגזרת של מכפלה ושל פונקציה מורכבת נקבל:

$$f'(x) = \left(x^2-3x-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}\right)' + \left(x^2-3x-1\right)'\cdot\sqrt{x+2} = \frac{x^2-3x-1}{2\sqrt{x+2}} + (2x-3)\cdot\sqrt{x+2}$$

מוצאים, עבור אלו ערכים של x הנגזרת היא חיובית:

$$\frac{x^2-3x-1}{2\sqrt{x+2}} + (2x-3)\cdot\sqrt{x+2} > 0,\ \frac{x^2-3x-1}{2\sqrt{x+2}} > -(2x-3)\sqrt{x+2}$$
$$x^2 - 3x - 1 > -2(2x - 3)(x + 2),\ x^2 - 3x - 1 > -4x^2 - 2x + 12,$$
$$5x^2 - x - 13 > 0,\ \underline{x > 1.72 \text{ או } x < -1.52}$$

באופן דומה מוצאים עבור אלו ערכים של x הנגזרת שלילית:

$$\frac{x^2-3\cdot x-1}{2\cdot\sqrt{x+2}} + (2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x+2} < 0,\ \frac{x^2-3\cdot x-1}{2\cdot\sqrt{x+2}} < -(2\cdot x-3)\cdot\sqrt{x+2}$$

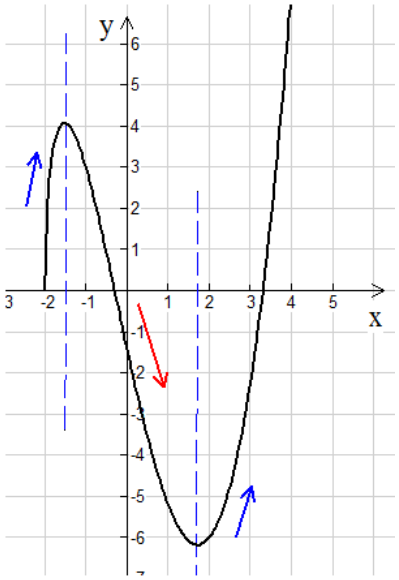
$5x^2 - x - 13 < 0$, $-1.52 < x < 1.72$

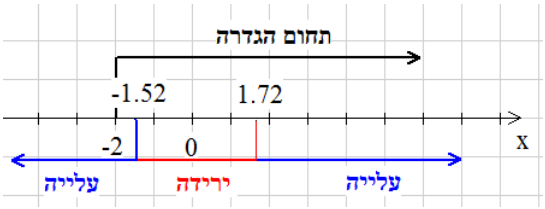
איחוד של תחום ההגדרה ותחום חיוביות נותן את תחומי העלייה:

$x > 1.72$ וגם $-2 < x < -1.52$

תחום השליליות נמצא בתוך תחום ההגדרה, לכן תחום הירידה הוא:

$-1.52 < x < 1.72$





מתבוננים בגרף הפונקציה ומוודאים שהפונקציה אכן עולה ויורדת בתחומים שמצאנו ובהתאם לחישובים.

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

הוכיחו (באמצעות חישוב הנגזרת) שהפונקציה עולה בתחום $x > 0$;
הקישו בקישור ובנו את גרף הפונקציה באמצעות התוכנה שתיפתח;
וודאו כי הגרף מתאים להוכחה האלגברית:

125. א) $f(x) = 5x$ ב) $f(x) = 2x - 5$ ג) $f(x) = 2x^3 + 1$

ד) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ ה) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ ו) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

126. הוכיחו שהפונקציה הבאה עולה בתחום $x > 1$:

א) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ב) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

ג) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ ד) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

127. הוכיחו כי הפונקציה הבאה יורדת בתחום $x > 1$:

א) $f(x) = -2x - 5$ ב) $f(x) = -x + 15$

ג) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ ד) $f(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x - 1}$

128. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ גדֵלה בקטע $x>1$ וקטֵנה בקטעים $x<0$ ו- $0<x<1$.

129. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות:

א) $f(x)=x^2-x$ ב) $f(x)=5x^2-3x-1$

ג) $f(x)=x^2+2x$ ד) $f(x)=x^2+12x-100$

ה) $f(x)=x^3-3x$ ו) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$

ז) $f(x)=x^3-6x^2+9$ ח) $f(x)=2x^3-3x^2-36x+40$

130. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות:

א) $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ב) $f(x)=1+\frac{2}{x}$

ג) $f(x)=-\sqrt{x-3}$ ד) $f(x)=1+3\sqrt{x-5}$

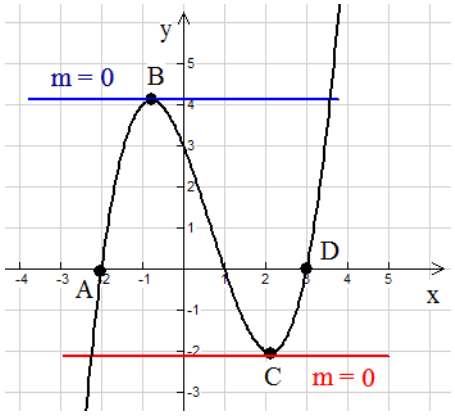
131. א) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+3}$ ב) $f(x)=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

ג) $f(x)=(3-x)\sqrt{5-x}$ ד) $f(x)=(3-x)\sqrt{x-5}$

132. א) $f(x)=(1-2x+3x^2)\cdot\sqrt{4-x}$ ב) $f(x)=(1-3x^2)\cdot\sqrt{x-5}$

ג) $f(x)=(2x^2+1)\cdot\sqrt{1-2x}$ ד) $f(x)=\sqrt{1-2x+3x^2}$

2.6 נקודות קיצון



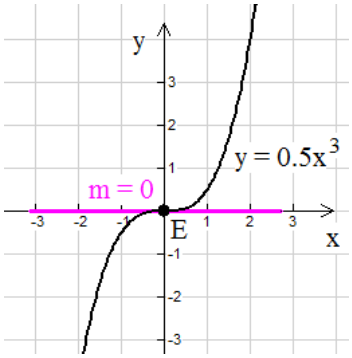
בסעיף הקודם ראינו שבקטע שבו נגזרת חיובית הפונקציה עולה, ואילו בקטע שבו הנגזרת שלילית היא יורדת.

מה קורה בנקודות שבהן נגזרת מתאפסת? מהגרפים משמאל עולה שיכולים להיווצר שלושה מצבים, שבהם נגזרת מתאפסת:

1. בנקודת מקסימום (נקודה B)
2. בנקודת מינימום (נקודה C)
3. בנקודת **פיתול** (נקודה E), שבה הפונקציה

אינה משנה את מגמתה מעלה או מטה, אלא את צורתה מ**קמורה כלפי מטה לקמורה כלפי מעלה** או להיפך).

לנקודות מקסימום או מינימום של פונקציה, שבהן תחום עלייה מתחלף לתחום ירידה או להיפך, קוראים **נקודות קיצון**.



לדוגמה, בגרפים משמאל הנקודות B ו- C הן נקודות קיצון, ואילו הנקודה E איננה כזו.

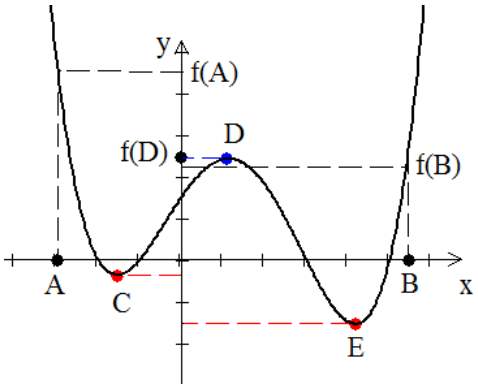
אם לפונקציה $f(x)$ קיימת נגזרת בנקודת קיצון, אזי ערכה יתאפס בנקודה זו. לדוגמה, בגרפים הנ"ל: $f'(B) = f'(C) = 0$.

תנאי זה הינו **הכרחי אולם לא מספיק**: בנקודת E, לדוגמה, הנגזרת שווה לאפס ($f'(E) = 0$), אולם הנקודה היא לא נקודת קיצון, אלא נקודת פיתול.

כיצד לקבוע האם הנקודה שבה $f'(x) = 0$ היא נקודת קיצון או פיתול?

וכיצד לקבוע האם נקודת הקיצון היא נקודת מקסימום או מינימום?

ראשית בוחנים את הנקודות **הפנימיות** של קטע סגור AB: $A \le x \le B$ (או $x \in [A, B]$).



נקודות הקיצון שבתוך הקטע (C, D, E) מכונות נקודות מקסימום או מינימום **מקומי**. משמעות הכינוי היא שערכי הפונקציה בקצות הקטע (f(A) ו- f(B)) יכולים להיות גדולים מאלה שבנקודת מקסימום מקומי (f(D)) או קטנים מאלה שבנקודות מינימום (f(C) ו- f(E)) מקומי.

ערכי הפונקציה משני צדיה של נקודת קיצון קטנים (כשהנקודה היא נקודת מקסימום) או גדולים (כשהנקודה היא נקודת מינימום) מערכה של הפונקציה בנקודה עצמה.

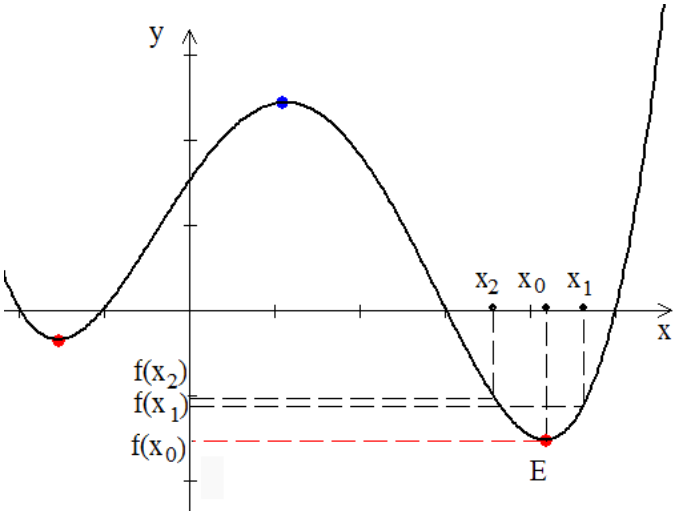
אחת הדרכים לקבוע את הסוג של נקודת קיצון x_0 נעשית בשלושה שלבים:

א) לחשב את ערך הפונקציה בנקודת קיצון $f(x_0)$ (לדוגמה, הנקודה E);

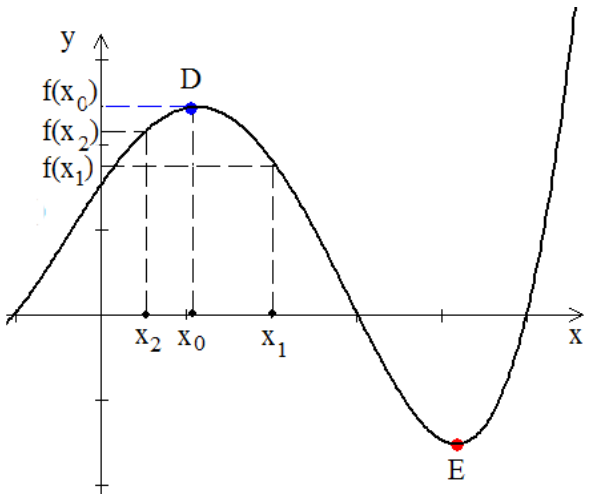
ב) לחשב את ערך הפונקציה בשתי נקודות x_1 ו- x_2, קרובות לנקודת קיצון x_0 – אחת מימין ($x_1 > x_0$) ואחת משמאל ($x_2 < x_0$) לנקודת הקיצון;

ג) להשוות את הערכים:

אם $f(x_0) < f(x_1)$ ו- $f(x_0) < f(x_2)$, אזי x_0 היא נקודת מינימום (כמו נקודה E):



אם $f(x_0) > f(x_1)$ ו- $f(x_0) > f(x_2)$, אזי x_0 היא נקודת מקסימום (כמו נקודה D):

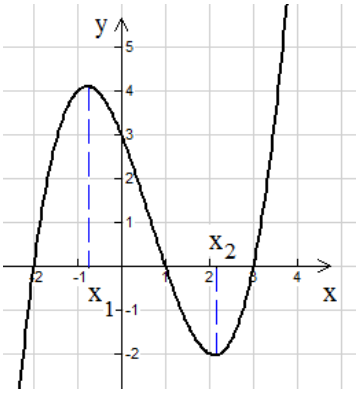


ואילו אם $f(x_0) > f(x_1)$ ו- $f(x_0) < f(x_2)$, או להיפך: $f(x_0) < f(x_1)$ ו- $f(x_0) > f(x_2)$, אזי x_0 היא איננה נקודת קיצון אלא נקודת פיתול.

דוגמה 1 הפונקציה שהגרף שלה מתואר משמאל היא:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

מצאו את שיעורי x של הנקודות החשודות כנקודות קיצון.



◀ מחשבים את הנגזרת:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 3x^2 - 2x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}$$

פותרים את המשוואה $f'(x) = 0$;

$$\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0, \quad 3x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{76}}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{19} \approx -0.79$$

$$x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{76}}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{19} \approx 2.12$$

בודקים, אם הנקודות שמצאנו הן נקודות מקסימום או מינימום:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

$$x_1 = -0.79\,, \quad f(x_1) = \frac{1}{2}\cdot(-0.79)^3 - (-0.79)^2 - \frac{5}{2}\cdot(-0.79) + 3 = 4.1$$

בתור נקודות סמוכות נבחר את הנקודות $x = 0$ ו- $x = -1$:

$$f(0) = \frac{1}{2}\cdot 0^3 - 0^2 - \frac{5}{2}\cdot 0 + 3 = 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 - (-1)^2 - \frac{5}{2}\cdot(-1) + 3 = 4$$

קיבלנו: $f(-1) = 4 < f(x_1),\ f(0) = 3 < f(x_1)$,

לכן $x_1 = -0.79$ היא נקודת קיצון <u>מקסימום</u>.

באופן דומה נבדוק את הנקודה השנייה:

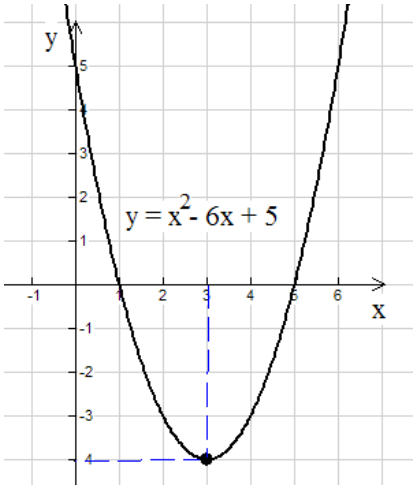
$$f(x_2) = \frac{1}{2}\cdot 2.12^3 - 2.12^2 - \frac{5}{2}\cdot 2.12 + 3 = -2.03$$

נבדוק את ערך הפונקציה בשתי נקודות סמוכות בשני צדיה של הנקודה $x = 2.12$,

$x = 3$ ו- $x = 1$:

$$f(3) = \frac{1}{2}\cdot 3^3 - 3^2 - \frac{5}{2}\cdot 3 + 3 = 0 \qquad f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^3 - 1^2 - \frac{5}{2}\cdot 1 + 3 = 0$$

קיבלנו: $f(1) = 0 > f(x_2),\ f(3) = 0 > f(x_2)$,



לכן נקודה x_2 היא נקודת קיצון מינימום.

בדרך זאת אפשר לחשב את שיעורי קדקוד של פרבולות.

דוגמה 2

נתונה פרבולה: $y = x^2 - 6x + 5$

מה שיעורי הקדקוד שלה?

◀ **פתרון**

קדקוד הפרבולה הוא נקודת קיצון של הפונקציה אותה היא מתארת, לכן נגזרת הפונקציה בנקודה זו שווה לאפס.

כך מוצאים את שיעור x של הקדקוד: $y'(x) = 2x - 6 = 0,\ \underline{x = 3}$

מציבים בביטוי של הפונקציה ומוצאים את שיעור ה- y של הקדקוד:

$$y = 3^2 - 6\cdot 3 + 5 = -4$$

תשובה: $(3, -4)$

הערה 1 כיוון שהפרבולה "מחייכת", הקדקוד שלה הוא נקודת קיצון מינימום, ואין צורך לבדוק את ערכי הפרבולה בשתי נקודות סמוכות כדי לגלות מאיזה סוג נקודת הקיצון.

הערה 2 דרך זו למציאת שיעורי קדקוד של פרבולה פשוטה יותר משימוש בנוסחאות המבטאות אותם באמצעות מקדמי הפונקציה.

דוגמה 3

מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x) = x^3 - x$.

◀ מוצאים נקודות שבהן הנגזרת מתאפסת:

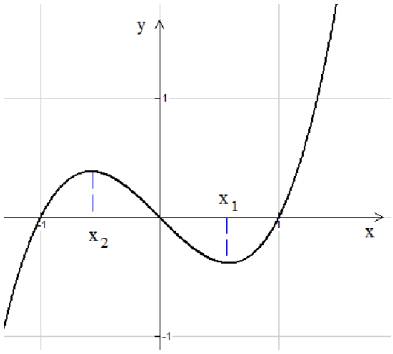
$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0,\ x^2 = \frac{1}{3},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58,\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.58$$

מציבים בביטוי של $f(x)$ את x_1 וערכי x של שתי נקודות סמוכות, $x = 1$ ו- $x = 0$:

$$x_1:\ f(x_1) = 0.58^3 - 0.58 \approx -0.38$$

$$f(1) = 1^3 - 1 = 0 > -0.38,\quad f(0) = 0$$

כיוון ש- $f(x_1) < f(1)$ וגם $f(x_1) < f(0)$, מסיקים



כי נקודה $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ היא <u>נקודת קיצון מינימום</u>.

באופן דומה בודקים את הנקודה השנייה:

x_2: $f(x_2) = -0.58^3 - (-0.58) \approx 0.38$

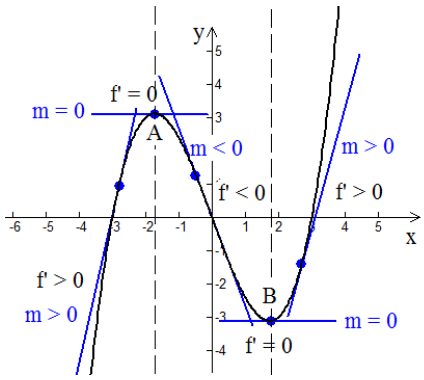
$f(0) = 0^3 - 0 = 0 < 0.38$

$f(-1) = -1^3 - (-1) = 0 < 0.38$

לכן הנקודה $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ היא <u>נקודת מקסימום</u>.

גרף הפונקציה, שאותו אפשר לשרטט באמצעות מחשבון גרפי או תוכנה לבניית גרפים, ממחיש את מסקנותינו.

<u>דרך אחרת לקביעת הסוג של נקודת קיצון</u>



בקטע שבו הפונקציה $f(x)$ עולה, הנגזרת חיובית $(f' > 0)$, בנקודת המקסימום (A) היא מתאפסת $(f'(A) = 0)$, ובקטע הירידה הנגזרת שלילית $(f' < 0)$; גם מסביב לנקודת המינימום B הנגזרת משנה את סימנה משלילי לחיובי כאשר x גדֵל.

התנהגות זו של הנגזרת מאפשרת לגלות האם נקודת הקיצון היא נקודת מינימום או מקסימום: בודקים את סימניה משני צדי הנקודה.

אם סביב נקודת הקיצון הנגזרת מחליפה סימן **משלילי לחיובי**, אזי הנקודה היא מינימום, ואם להיפך – **מחיובי לשלילי** – אזי הנקודה היא מקסימום.

דוגמה 4

מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x) = x^3 - x$.

◀ **פתרון (דרך 2)**

נמצא את הנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת (הנקודות ה"חשודות" לנקודות קיצון):

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0,\ x^2 = \frac{1}{3},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

כדי לבדוק כיצד הנגזרת משנה את סימנה משני צדיה של כל נקודה, נציג אותה כמכפלת שני גורמים:

$$f'(x) = 3\cdot\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

נבדוק סימני הנגזרת כאשר x עובר דרך הנקודות החשודות:

$$x < \frac{1}{\sqrt{3}}:\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0,\ \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \ \Rightarrow\ f'(x) < 0$$

$$x > \frac{1}{\sqrt{3}}:\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,\ \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \ \Rightarrow\ f'(x) > 0$$

לכן $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ היא נקודת המינימום;

עבור הנקודה השנייה נקבל:

$$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}:\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0,\ \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \ \Rightarrow\ f'(x) > 0$$

$$x > -\frac{1}{\sqrt{3}}:\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,\ \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \ \Rightarrow\ f'(x) < 0$$

לכן $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ היא נקודת המקסימום.

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

133. מצאו נקודות קיצון של הפונקציה:

א) $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$

ב) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$

ג) $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2}$

ד) $f(x) = x^3 - 4x + 8$

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

134. א) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ ח) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$

135. מצאו נקודות קיצון של הפונקציה וקבעו, אלו מהן נקודות מקסימום ואלו נקודות מינימום:

א) $f(x) = 5 + 12x - x^3$ ב) $f(x) = 9 + 8x^2 - x^4$

ג) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ ד) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$

136. הוכיחו שלפונקציה אין נקודות קיצון:

א) $f(x) = \sqrt{x}$ ב) $f(x) = 3x - 7$ ג) $f(x) = 3x^5 + 2x$

ד) $f(x) = 3 - 7x$ ה) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ ו) $f(x) = -\frac{1}{x}$

מצאו נקודות קיצון של הפונקציה וקבעו, אלו מהן נקודות מקסימום ואלו נקודות מינימום:

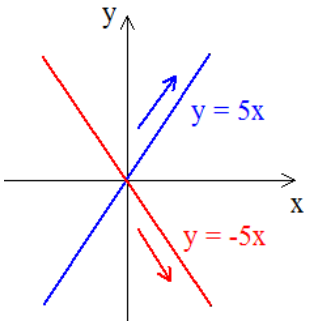
137. א) $f(x) = (2x - 5)\cdot\sqrt{x + 3}$ ב) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

ג) $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2}$ ד) $y(x) = (1 - 2x)\cdot\sqrt{5 - x}$

138. א) $f(x) = (-1 + 2x + 3x^2)\cdot\sqrt{2 - x}$ ב) $f(x) = (1 + 2x)\cdot\sqrt{3 - x}$

ג) $f(x) = 2x\cdot\sqrt{3 - x} - x^2$ ד) $f(x) = 2x\cdot\sqrt{3 - x} - x^2\cdot\sqrt{6 - 2x}$

2.7 חקירת פונקציות עם פרמטרים



בסעיפים קודמים ראינו שפונקציות מאותו סוג (קווית, ריבועית, פולינום, שורש וכו') מתנהגות באופן שונה, בהתאם לערכי המקדמים בביטוי הפונקציה.

לדוגמה, שתי הפונקציות $f_1(x) = 5x$ ו- $f_2(x) = -5x$ שייכות לסוג כללי של פונקציית יחס ישר $f(x) = ax$, כאשר הן נבדלות בערכו של הפרמטר a ($a = 5$ או $a = -5$ בהתאמה). למרות זאת, $f_1(x) = 5x$ עולה בכל תחום הגדרתה, ואילו $f_2(x) = -5x$ יורדת.

כיצד יודעים מהם הערכים של הפרמטר a שבהם הפונקציה $f(x) = ax$ עולה , ומהם הערכים שבהם היא יורדת?

התשובה: כאשר $a > 0$ הפונקציה עולה, כאשר $a < 0$ היא יורדת.

אפשר להוכיח זאת באמצעות הנגזרת, שהרי למדנו, כי בתחומי העלייה נגזרת הפונקציה חיובית, ובתחומי הירידה היא שלילית.

נגזרת הפונקציה $f(x) = ax$ היא: $f'(x) = a$.

על כן, בתחום העלייה צריך להתקיים התנאי: $f'(x) = a > 0$,

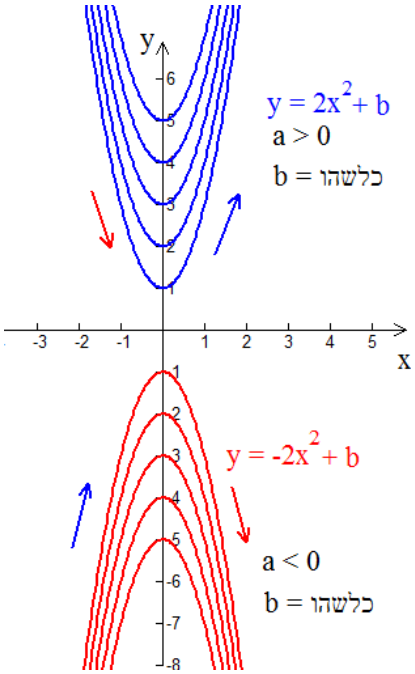
ובתחום הירידה: $f'(x) = a < 0$. **מ.ש.ל.**

באופן דומה אפשר למצאו את תחומי העלייה והירידה של פונקציה ריבועית.

דוגמה 1

מצאו את תחומי העלייה והירידה של פונקציה ריבועית מהסוג: $f(x) = ax^2 + b$,

שבה a ו- b הם פרמטרים.



◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 2ax$.

ב. מוצאים את תחום העלייה:

$f'(x) > 0,\ 2ax > 0,\ ax > 0$

כאשר $a > 0$, תחום העלייה הוא $x > 0$

ותחום הירידה: $x < 0$.

כאשר $a < 0$, $x > 0$ הוא תחום הירידה,

ו- $x < 0$ תחום העלייה.

שימו לב: <u>המסקנה אינה תלויה בערכו של b</u>!

דוגמה 2

מצאו את תחומי העלייה והירידה של פונקציה ריבועית מהסוג: $f(x) = ax^2 + 4x$, a – פרמטר.

◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 2ax + 4$.

ב. מוצאים את תחום העלייה: $f'(x) > 0,\ 2ax + 4 > 0,\ ax + 2 > 0,\ \underline{ax > -2}$

מחלקים את שני האגפים של אי שוויון ב- a:

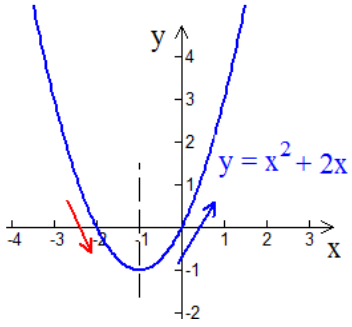
כאשר $a > 0$, סימן של האי שוויון לא ישתנה,

לכן $x > -\frac{2}{a}$ הוא תחום העלייה,

ו- $x < -\frac{2}{a}$ הוא תחום הירידה.

בגרף משמאל $a = 1$: $f(x) = x^2 + 2x$

$x > -1$ – תחום עלייה, $x < -1$ – תחום ירידה.



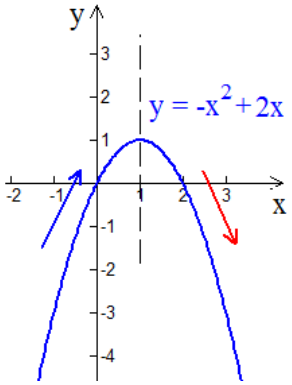
אם $a < 0$, אזי החילוק ב- a של שני אגפי האי שוויון יהפוך את כיוונו, ונקבל עבור תחום העלייה:

$ax > -2$, $x < -\frac{2}{a}$.

ועבור תחום הירידה: $ax < -2$, $x > -\frac{2}{a}$.

בגרף משמאל: $a = -1$, $f(x) = -x^2 + 2x$,

$x < 1$ – תחום עלייה, $x > 1$ – תחום ירידה.



מהדוגמאות הבאות אפשר לראות כי פונקציית חזקה ממעלה שלישית $f(x) = ax^3$ עולה או יורדת בכל תחום ההגדרה, בהתאם לסימן המקדם a.

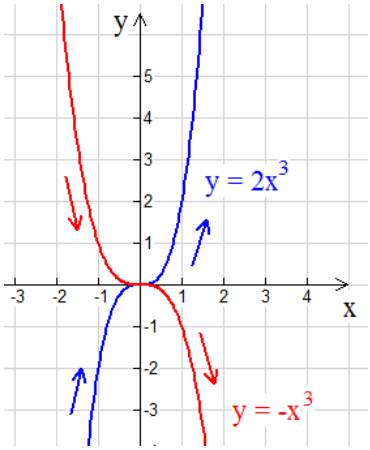
דוגמה 3

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = 2x^3$.

◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 6x^2$.

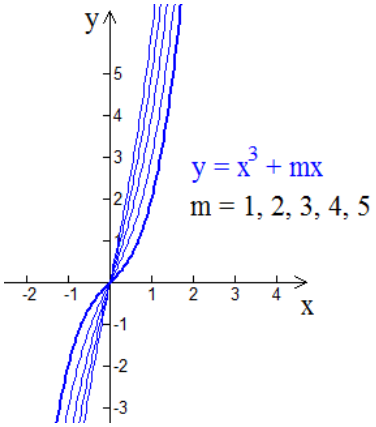
ב. כיוון שביטוי אינו שלילי עבור כל x: $6x^2 \geq 0$,

מסיקים כי $f(x)$ עולה בכל תחום.



דוגמה 4

מצאו תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x) = -x^3$



◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = -3x^2$.

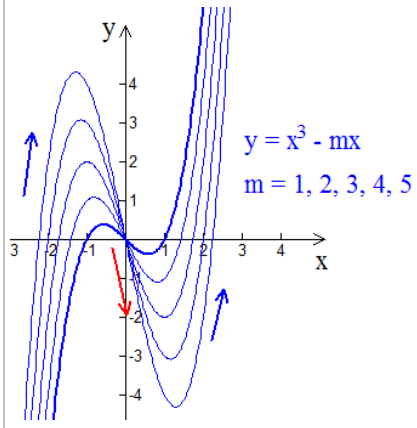
ב. כיוון שביטוי זה אינו שלילי עבור כל x: $-3x^2 \le 0$,

מסיקים כי f(x) יורדת בכל תחום.

דוגמה 5

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

$f(x) = x^3 + mx$, $m > 0$.



◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 + m$.

ב. בתחום העלייה: $3x^2 + m > 0$,

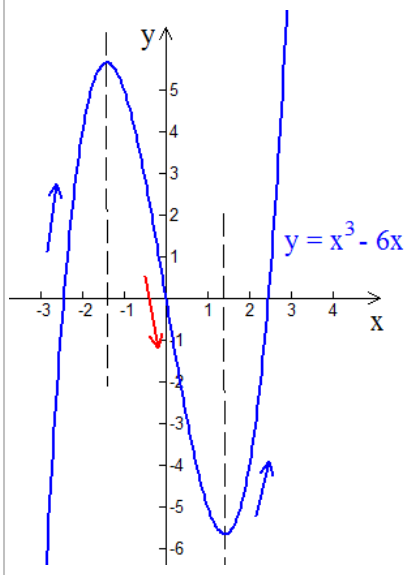
מכאן: $x^2 > -\frac{m}{3}$, וכיוון ש- $x^2 \ge 0$,

תחום העלייה - $x > 0$, תחום הירידה: $x < 0$.

דוגמה 6

מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה

$f(x) = x^3 + mx$, $m < 0$.



◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 + m$.

ב. בתחום העלייה: $3x^2 + m > 0$,

מכאן נובע: $x^2 > -\frac{m}{3}$.

הפתרון: $x > \sqrt{-\frac{m}{3}}$, $x < -\sqrt{-\frac{m}{3}}$

לדוגמה, תחומי העלייה של הפונקציה

$f(x) = x^3 - 6x$

הם: $x > \sqrt{2}$ ו- $x < -\sqrt{2}$ (ראו גרף משמאל).

ותחום הירידה: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

תרגילים

282. א מצאו, עבור אלו ערכים של m הפונקציה $f(x) = mx + 5$ עולה בתחום $x > 5$?

282. ב מצאו, עבור אלו ערכים של m הפונקציה $f(x) = mx - 5$ יורדת בתחום $x < -5$?

282. ג נתונה פונקציה ריבועית עם פרמטר m: $f(x) = x^2 + mx$.

מצאו את תחום ערכי הפרמטר שעבורם הפונקציה עולה בתחום $x > 3$.

282. ד נתונה פונקציה ריבועית עם פרמטר m: $f(x) = x^2 + mx + 5$.

מצאו את תחום ערכי הפרמטר שעבורם הפונקציה עולה בתחום $x > 2$.

282. ה נתונה פונקציה ריבועית עם שני פרמטרים, m ו- n: $f(x) = x^2 + mx + n$.

מצאו את ערכי הפרמטרים שעבורם הפונקציה עולה בתחום $x > 0$.

282. ו נתונה פונקציה ריבועית עם שני פרמטרים, m ו- n: $f(x) = -x^2 + mx + n$.

מצאו את ערכי הפרמטרים שעבורם הפונקציה יורדת בתחום $x > 0$.

282. ז נתונה פונקציה ריבועית עם שני פרמטרים, m ו- n: $f(x) = -x^2 + mx + n$.

מצאו את ערכי הפרמטרים שעבורם הפונקציה יורדת בתחום $x > -2$.

282. ח מצאו את ערך הפרמטר m שעבורו הפונקציה $f(x) = x^3 + mx$ יורדת בתחום $-2 < x < 2$.

⇦ מקומן ואף קיומן של נקודות קיצון תלויים גם הם בערכי הפרמטרים.

לדוגמה, לפונקציה ריבועית $f(x) = ax^2+bx +c$ יש נקודת מינימום אחת אם $a > 0$,

או נקודת מקסימום אחת אם $a < 0$;

שיעורי x ו- y של נקודות קיצון אלה (שיעורי הקדקוד של הפרבולה) תלויים בערכי כל הפרמטרים: a, b ו- c.

דוגמה 7 מצאו שיעור x של קדקוד הפרבולה $y = x^2 + bx + c$.

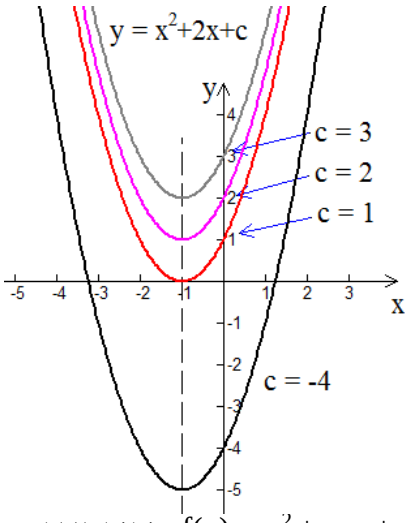
◀ קדקוד הפרבולה הוא נקודת קיצון של הפונקציה, לכן בנקודה זו נגזרת הפונקציה מתאפסת.

מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 2x + b$, ומשווים

אותה לאפס: $2x + b = 0$.

מכאן מוצאים: $x = -\frac{b}{2}$. המסקנה היא כי שיעור x של קדקוד הפרבולה אינו תלוי בערכו של הפרמטר c.

בשרטוט משמאל מוצגים גרפים של פונקציה ריבועית $f(x) = x^2 + 2x + c$ עבור כמה ערכים של הפרמטר c.



רואים כי שיעורי x של כל הקדקודים שווים לכל הפרבולות, וערכו - $x = -\frac{2}{2} = -1$.

דוגמה 8

עבור אלו ערכים של הפרמטרים m ו- n לפונקציה $f(x) = x^2 + mx + n$ יהיה ערך מינימלי כאשר $x = 5$?

א. על פי הדוגמה הקודמת, שיעור x של נקודת המינימום הוא $x = -\frac{m}{2} = 5$, וערכו אינו תלוי ב- n. לכן $m = -10$, ואלו n הוא כלשהו.

⇦ ערכה של פונקציה ריבועית בנקודת הקיצון (שיעור y של קדקוד הפרבולה) תלוי גם בפרמטר c.

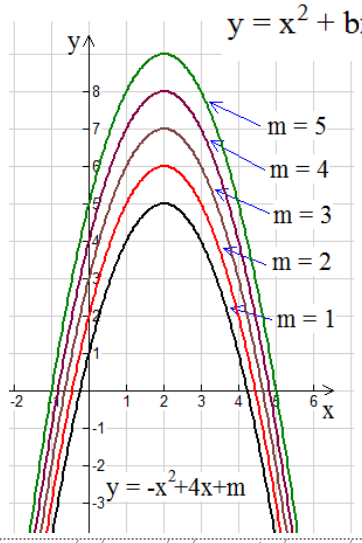
לדוגמה, במקרה של $a = 1$, נציב את $x = -\frac{b}{2}$ בביטוי הפונקציה ונקבל:

$$y = x^2 + bx + c = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2}\right) + c = \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + c = c - \frac{b^2}{4}$$

דוגמה 9

מצאו, עבור אלו ערכים של הפרמטר m הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 4x + m$ אינו גדול מ- 7.

◀ בשרטוט משמאל רואים גרפים של הפונקציה עבור כמה ערכי הפרמטר m.



מחשבים את ערך הפונקציה בנקודת המקסימום:

א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = -2x + 4$

ב. מוצאים את שיעורי הקדקוד:

$$-2x + 4 = 0,\ x = 2,\ y = -2^2 + 4\cdot 2 + m = m + 4$$

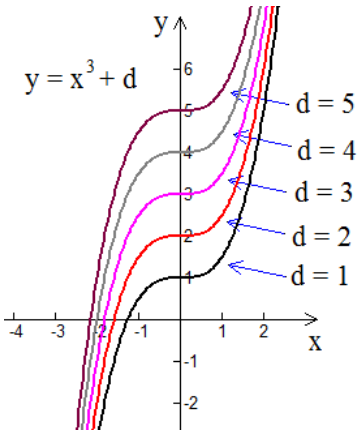
על פי הנתון, ערך הפונקציה אינו גדול מ- 7. רושמים תנאי זה ומקבלים תשובה:

$$m + 4 < 7,\ \underline{m < 3}$$

מהשרטוט בדף קודם רואים שאכן עבור $m < 3$ שיעור y של קדקוד הפרבולה (ערך הפונקציה בנקודת מקסימום) קטן מ- 3.

⇦ לפונקציית פולינום ממעלה שלישית $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ אין נקודות קיצון כאשר $b = c = d = 0$, כפי שראינו בדוגמאות 3 ו- 4;

כאשר $b = c = 0,\ d \neq 0$, גרף הפונקציה $f(x) = ax^3 + d$ מתקבל מגרף הפונקציה הבסיסית $f(x) = ax^3$ באמצעות הזזה מקבילית לאורך ציר y (ראו שרטוט בצד שמאל).



לכן גם במקרה זה לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון בכל התחום.

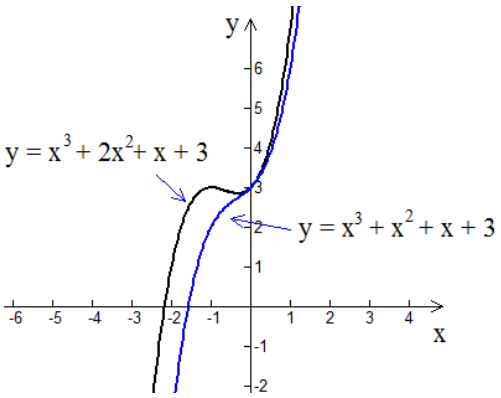
כאשר $b \neq 0$ ו/או $c \neq 0$ לפונקציית פולינום ממעלה שלישית יכולות להיות או לא להיות נקודות קיצון.

לדוגמה, לפונקציה $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ יש שתי נקודות קיצון, ולפונקציה $g(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ אין אף נקודת קיצון אחת.

כיצד יודעים עבור אלו ערכים של הפרמטרים לפולינום יש נקודות קיצון, ובאלו אין?

לשם כך מחשבים את הנגזרת ומשווים אותה לאפס.

ערכי הפרמטרים, שעבורם קיימים פתרונות למשוואה שהתקבלה, הם שקובעים את הפולינום בעל נקודות הקיצון.



דוגמה 10 עבור אלו ערכי הפרמטר m לפולינום ממעלה שלישית $f(x) = x^3 + mx + 5$ יש נקודות קיצון?

◀ א. מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 + 2m$

ב. $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2m = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{2m}{3}}$

ג. למשוואה יש פתרונות כאשר $m \le 0$.

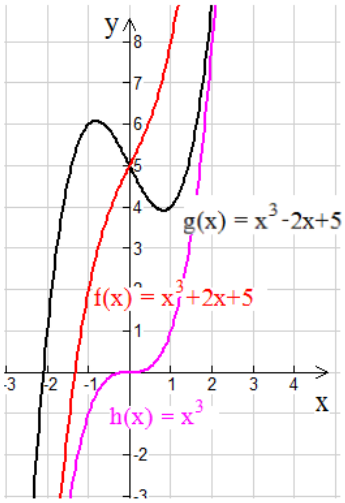
ד. בודקים את המסקנה: באמצעות התוכנה לבניית גרפים בונים גרפים של שלוש הפונקציות:

$(m = 2)$ $f(x) = x^3 + 2x + 5$

$(m = 0)$ $h(x) = x^3$

ו- $(m = -2)$ $g(x) = x^3 - 2x + 5$

את התוצאה אפשר לראות בגרף משמאל.



מחשבון אלגברי שרטוט גרפים

תרגילים

282. ט א) מצאו שיעור x של קדקוד הפרבולה $y = 2x^2 - 4mx + n$ (m ו- n - פרמטרים).

ב) מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 4mx + n$.

ג) מה הקשר בין הפרמטרים כדי שהערך המינימלי לא יהיה שלילי?

282. י א) מצאו את ערכי הפרמטר m שעבורם הערך המרבי של הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + m$ אינו גדול מ- 7.

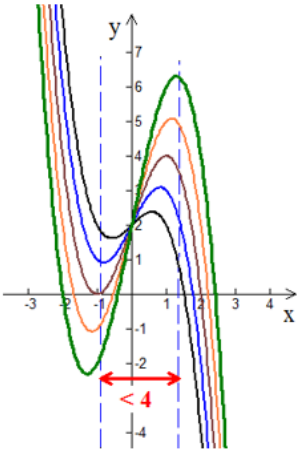
ב) מצאו את ערכי הפרמטר m שעבורם הערך המזערי של הפונקציה $f(x) = 2x^2 + 2x + m$ אינו קטן מ- 7.

282. יא נתונה פונקציה עם פרמטר m: $f(x) = -x^3 + mx + 2$

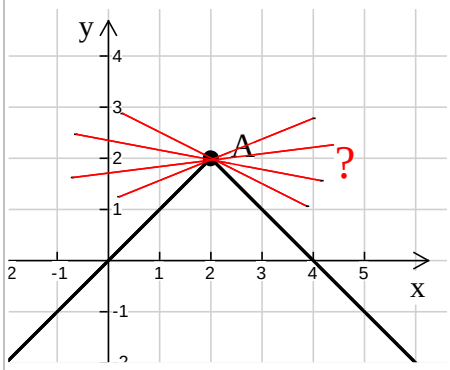
א) עבור אלו ערכי הפרמטר הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה?

ב) עבור אלו ערכי הפרמטר ההפרש בין שיעורי x של שתי נקודות קיצון של הפונקציה אינו גדול מ- 4?

ג) עבור אלו ערכי הפרמטר ההפרש בין ערכי הפונקציה בנקודות קיצון אינו קטן מ- 2?



2.8 מקסימום ומינימום של פונקציה בקטע



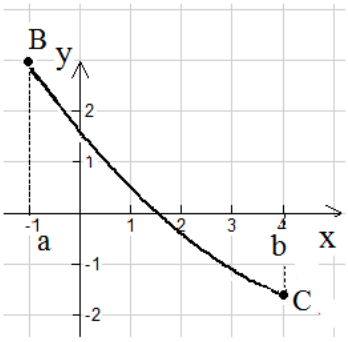
התבוננו בגרף הפונקציה המוגדרת באופן הבא:

בתחום $x < 2$: $f(x) = x$

בתחום $x \geq 2$: $f(x) = -x + 4$

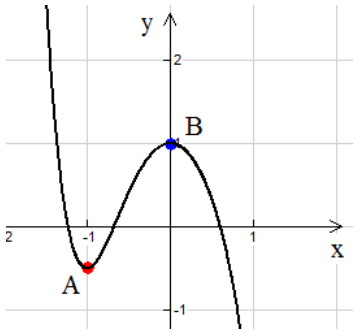
בנקודה $x = 2$ לפונקציה יש מקסימום, אולם אי-אפשר להעביר דרכה משיק לגרף הפונקציה, לכן לפונקציה זאת בנקודה $x = 2$ אין נגזרת.

עם זאת, כיוון שבקודה A תחום העלייה מתחלף לתחום ירידה, הנקודה היא נקודת קיצון (מקסימום).



נקודות B ו- C הנמצאות **בקצות קטע** מסוים $[a, b]$ (כלומר $a \leq x \leq b$) בתחום ההגדרה של פונקציה $y(x)$ מהוות בהתאמה **נקודות מקסימום ומינימום** של הפונקציה בקטע זה, אולם הן אינן נקודות קיצון, כיוון שבנקודות אלה תחומי ירידה ועלייה אינם מתחלפים (כי הפונקציה אינה מוגדרת מחוץ לקטע BC).

כפי שראינו קודם, בתחום אינסופי ($-\infty < x < \infty$), ערכי הפונקציה משני צדיה של נקודת קיצון קטנים (או גדולים) מערכה בנקודה עצמה. נקודות אלה הן נקודות **מקסימום או מינימום מקומי**.



אולם אם נבחר **קטע** מסוים על ציר מספרים, הפונקציה יכולה לקבל את ערכה המקסימלי (או המינימלי) לאו דווקא בנקודות קיצון אלא בקצות הקטע.

הנקודה, שבה ערך הפונקציה הוא הגדול ביותר (או הקטן ביותר) בכל תחום ההגדרה של הפונקציה, נקראת נקודת מקסימום או מינימום **מוחלט**.

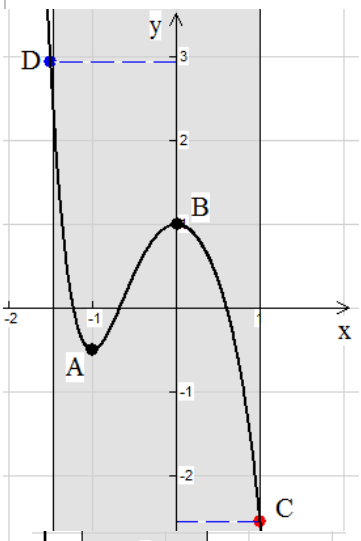
דוגמה: בתחום אינסופי ($-\infty < x < \infty$) לפונקציה

$$y(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$$

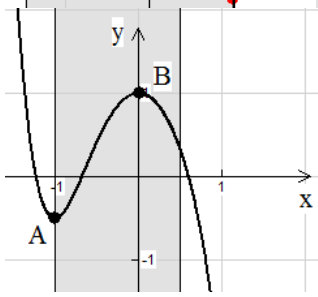
שתי נקודות קיצון: B (מקסימום מקומי) ו- A (מינימום מקומי):

$$f'(x) = -5x - 5x^4 = -5x(1 + x^3) = 0$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -1$$



אולם, נקודות הקיצון A ו- B אינן נקודות מקסימום ומינימום **המוחלטים** של הפונקציה **בקטע** מסוים. לדוגמה, בקטע [-1.5, 1] נקודות מקסימום ומינימום **מוחלטים** נמצאות בקצוות הקטע (D נקודת המקסימום ו- C נקודת המינימום).



אם נבדוק קטע אחר, למשל את [-1, 0.5], נגלה שנקודות A ו– B שוב הופכות לנקודות מינימום ומקסימום בהתאמה, אולם הפעם הנקודה A איננה נקודת קיצון: היא נמצאת בקצה תחום ההגדרה, ולא ניתן לקבוע האם מתחלפים תחומי העלייה והירידה משני צדיה של הנקודה (הרי הפונקציה לא מוגדרת עבור $x < -1$).

השיטה למציאת נקודות המקסימום והמינימום המוחלטים בקטע כוללת שלבים הבאים:

א. למצוא את הנקודות החשודות כנקודות קיצון (על ידי השוואתה של הנגזרת לאפס) ולחשב את ערכי הפונקציה בנקודות שהתקבלו;

ב. לחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה של הקטע;

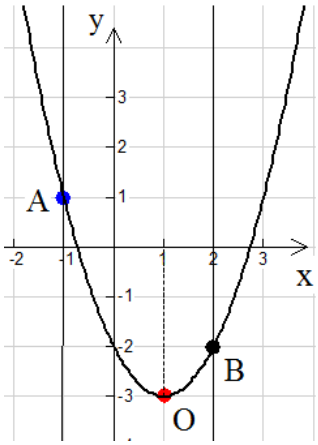
ג. להשוות את ערכי הפונקציה בנקודות החשודות כנקודות קיצון עם אלה שבקצוות, וכך למצוא את נקודות המקסימום או המינימום המוחלטים.

דוגמה 1 מצאו את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 2$ בתחום $x \in [-1, 2]$.

◀ א) מוצאים את הנקודות החשודות כנקודות קיצון:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0,\ x = 1,$$

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 - 2 = -3,\ \underline{O(1, -3)}.$$



ב) מחשבים את ערכי הפונקציה בקצות הקטע:

$$f(-1) = (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 2 = 1,$$

$$f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 - 2 = -2.$$

ג) מהשוואת הערכים מסיקים כי נקודת המינימום המוחלט היא נקודת הקיצון $O(1, -3)$,
ונקודת המקסימום המוחלט בקטע $[-1, 2]$ היא הנקודה $A(-1, 1)$.

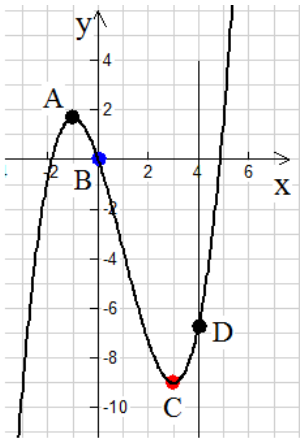
דוגמה 2 מצאו את נקודות המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - x^2$ בקטע $[0, 4]$.

◀ א) מוצאים את הנקודות החשודות כנקודות קיצון:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 3$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1) - (-1)^2 = 1\frac{2}{3} \approx 1.67$$

$$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3\cdot 3 - 3^2 = -9.$$



ב) נקודות הקיצון שמצאנו: $A(-1, 1.67)$ ו- $C(3, -9)$.

ג) נחשב את ערכי הפונקציה בקצות הקטע:

$$f(0) = 0,$$

$$f(4) = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 3\cdot 4 - 4^2 = -6\frac{2}{3} \approx -6.67$$

ד) מהשוואת הערכים מסיקים כי נקודת המינימום המוחלט בקטע הנתון היא נקודת הקיצון $C(3, -9)$, ונקודת המקסימום המוחלט בקטע $[0, 4]$ היא נקודה $B(0, 0)$.

תרגילים

139. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה :

א) $f(x) = x^3 - 3x^2$ ב) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

ג) $y(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 1$ ד) $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$

140. מצאו את הערכים המקסימלי והמינימלי של הפונקציה f :

א) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ בקטעים $[1, 3]$ ו- $[-1, 1]$

ב) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ בקטעים $[-1, 1]$ ו- $[0, 3]$

ג) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ בקטעים $[0, 2]$ ו- $[2, 3]$

ד) $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 5$ בקטעים $[-4, 0]$ ו- $[0, 2]$

141. מה גדול יותר : הערך המקסימלי של הפונקציה בקטע A או הערך המינימלי בקטע B :

א) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $A = [-4, 0]$,$B = [3, 4]$

ב) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$; $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $B = [2, 3]$?

142. מצאו את הערכי המשתנה x מהקטע $[-2, 5]$ אשר עבורם קצב השתנות הפונקציה $f(x) = 21x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$ (ערך הנגזרת) יהיה מקסימלי או מינימלי.

143. מצאו את הערכים המקסימלי (או המינימלי) של הפונקציה f :

א) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ בתחום $x > 0$;

ב) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ בתחום $x < 0$.

ג) $f(x) = \sqrt{x} - 3$ בתחום $x > 0$;

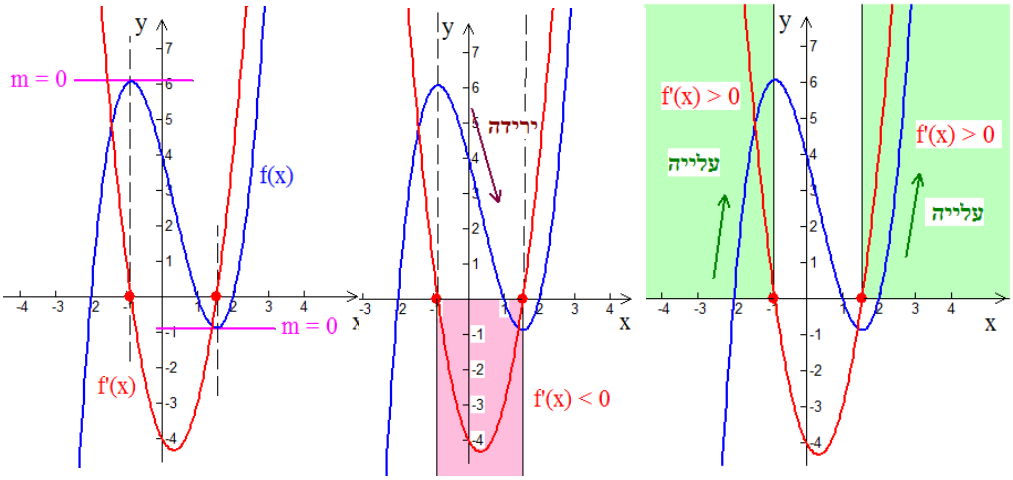
ד) $f(x) = 4 - \sqrt{x}$ בתחום $x > 0$.

2.9 הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

בסעיפים הקודמים למדנו על תכונות עיקריות של נגזרת הפונקציה:

א. בתחום שבו הפונקציה עולה, הנגזרת חיובית, כלומר הגרף של פונקציית הנגזרת נמצא מעל ציר ה- x (שרטוט א);

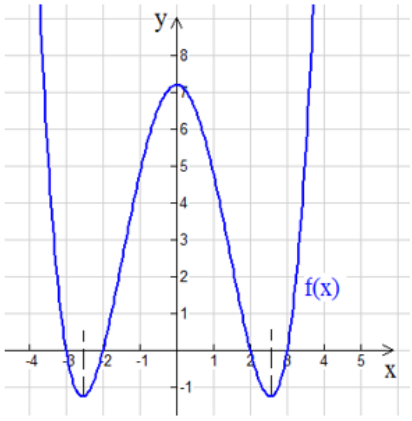
ב. בתחום שבו הפונקציה יורדת, הנגזרתה שלילית, כלומר הגרף של פונקציית הנגזרת נמצא מתחת לציר ה- x (שרטוט ב).



שרטוט א　　שרטוט ב　　שרטוט ג

ג. בנקודות שבהן תחומי העלייה והירידה מתחלפים (נקודות קיצון), ערך הנגזרת שווה לאפס (שרטוט ג).

כללים אלה מאפשרים לשרטט את סקיצת הגרף של פונקציית הנגזרת בהינתן גרף הפונקציה, או לחלופין, לשרטט את גרף הפונקציה בהינתן גרף של פונקציית הנגזרת.



שרטוט ד

דוגמה 1

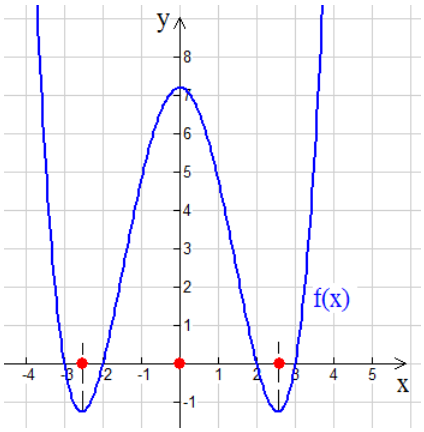
נתון גרף של פונקציה (שרטוט ד).

בנו את סקיצת הגרף של הפונקציית הנגזרת.

◀ א. שיעורי x של נקודות הקיצון של הפונקציה הם: $x = -2.5,\ x = 0$ ו- $x = 2.5$.

מכאן מסיקים כי נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת עם ציר x הן:

(-2.5, 0), (0, 0) ו- (2.5, 0) (ראו שרטוט ה).

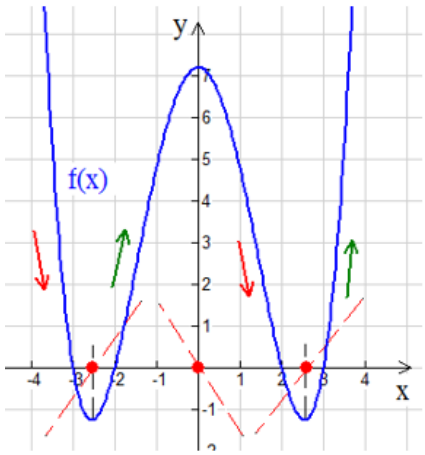


שרטוט ה

ב. בתחום $x > 2.5$ הפונקציה עולה, לכן בתחום זה פונקציית הנגזרת חיובית: $f'(x) > 0$; בתחום $0 < x < 2.5$ הפונקציה יורדת, לכן בתחום זה $f'(x) < 0$;

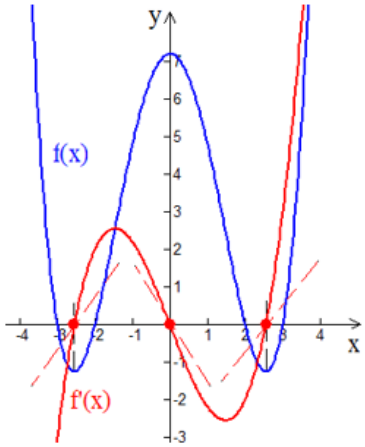
ג. משיקולים דומים מסיקים כי פונקציית הנגזרת חיובית בתחום $-2.5 < x < 0$ ושלילית בתחום $x < -2.5$.

ד. משרטטים סקיצה של גרף הנגזרת (בקווים מקווקווים, שרטוט ו).



שרטוט ו'

ה. שיפוע הגרף של הפונקציה הנגזרת אינו משתנה באופן פתאומי, לכן הקווים המקווקווים שבשרטוט ח' אינם ישרים, אלא עקומות המחוברות זו לזו.
לכן "מעגלים" את הקטעים הישרים ומקבלים את סקיצת הגרף של הפונקציה הנגזרת (שרטוט ז).



שרטוט ז

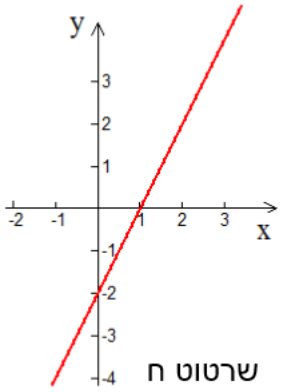
דוגמה 2

נתון גרף של נגזרת הפונקציה (שרטוט ח).
בנו את סקיצת הגרף של הפונקציה.

◀ א) ערך הנגזרת שווה לאפס בנקודה $(1,0)$.
לכן בנקודה שבה $x = 1$ לפונקציה יש נקודת קיצון (מקסימום או מינימום).

ב) בתחום $x > 1$ גרף הנגזרת נמצא מעל ציר x ($f'(x) > 0$),
לכן בתחום זה הפונקציה עולה.

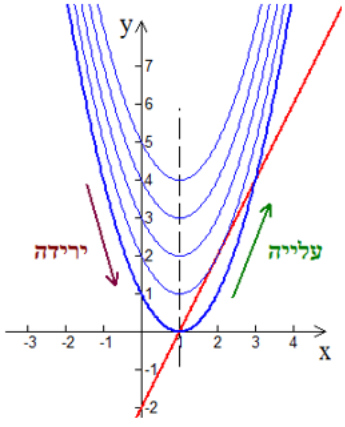
ה) בתחום $x < 1$ גרף הנגזרת נמצא מתחת לציר x ($f'(x) < 0$),
לכן בתחום זה הפונקציה יורדת.



שרטוט ח

ד) מ- ב' ו- ג' מסיקים כי בנקודה שבה $x = 1$ לפונקציה $f(x)$ יש נקודות מינימום.

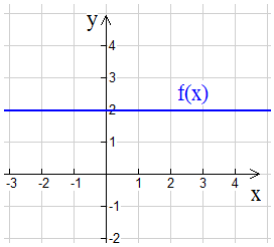
ה) כל אחד מהגרפים בצבע כחול בשרטוט ט' מתאימים לתנאים אלה.
אילו ידענו את ערך הפונקציה בנקודה מסוימת (לדוגמה: $f(1) = 0$), יכולנו לקבוע, איזו עקומה מתאימה לפונקציה שהנגזרת שלה נתונה.



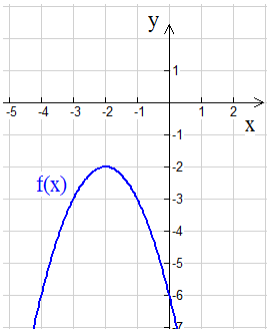
שרטוט ט

תרגילים

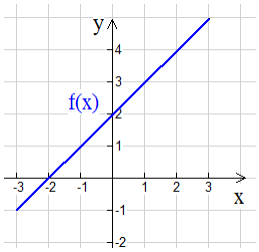
287.א נתונים גרפים של פונקציות. בְּנו לכל גרף את סקיצת הגרף של הפונקציה הנגזרת:



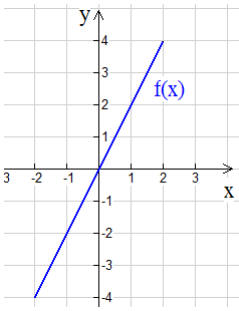
א)



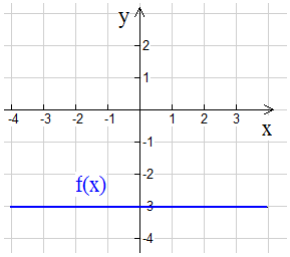
ב)



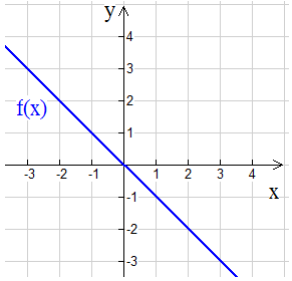
ג)



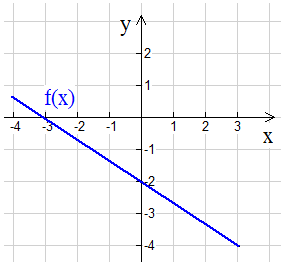
ד)



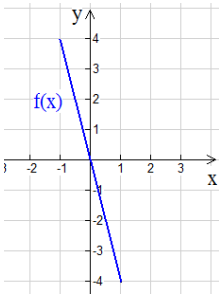
ה)



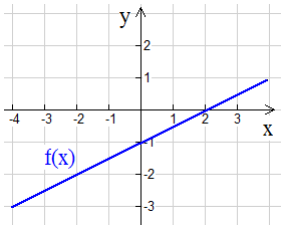
ו)



ז)

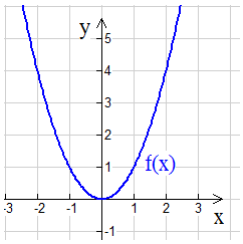


ח)

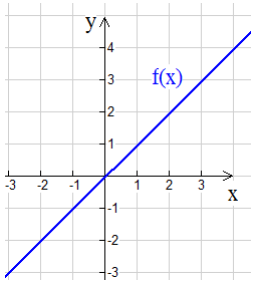


ט)

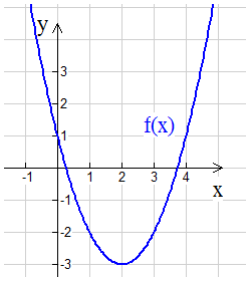
ב.287



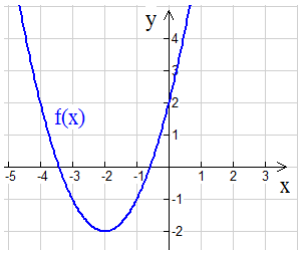
א)



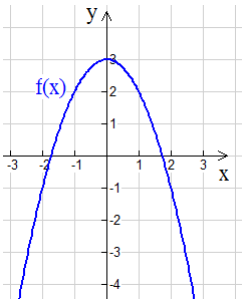
ב)



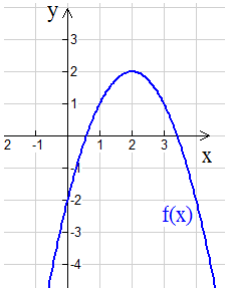
ג)



ד)

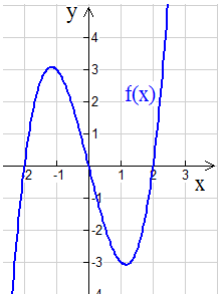


ה)

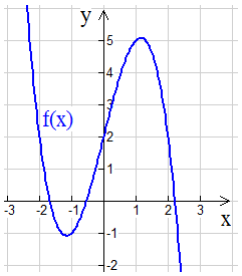


ו)

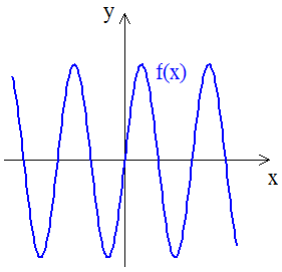
ג.287



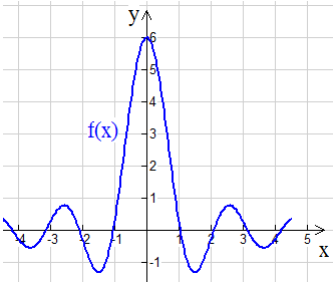
א)



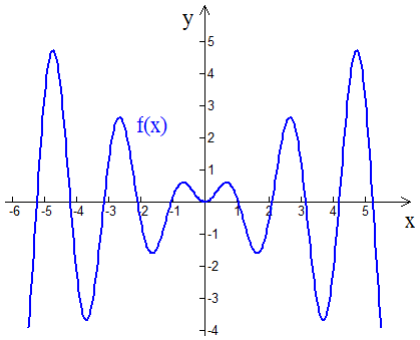
ב)



ג)

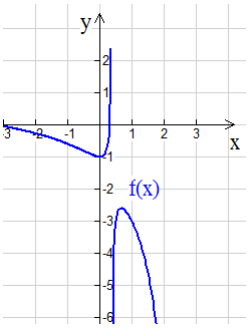


ד)

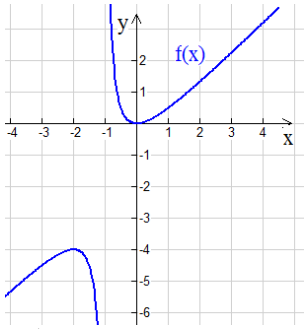


ה)

ו)

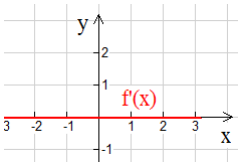


ז)

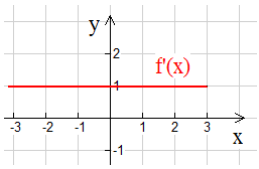


ד.287 נתונים גרפים של הפונקציה הנגזרת. בְּנו לכל גרף את סקיצות הגרפים של כמה פונקציות מתאימות:

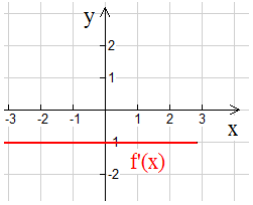
א)



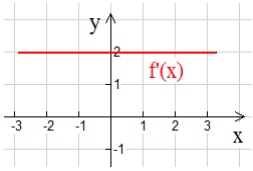
ב)



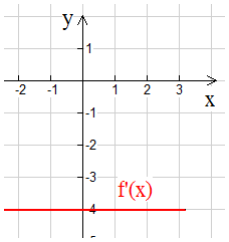
ג)



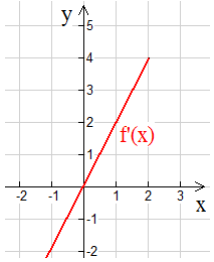
ד)



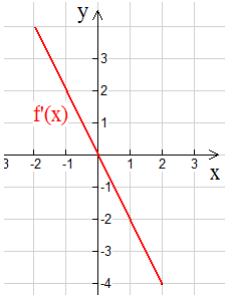
ה)



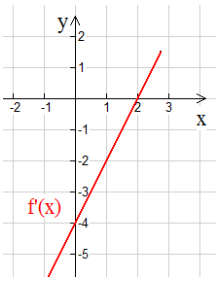
ו)



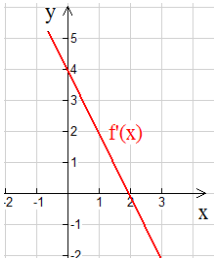
ז)



ח)



ט)



2.10 בעיות קיצון

שימוש בנגזרת מאפשר לפתור בעיות שונות הן מתחום המתמטיקה והן מחיי היום-יום על ידי מציאת הערך הגדול ביותר או הקטן ביותר (בעיות קיצון).

הדוגמה העתיקה ביותר מתוארת ביצירה יוונית לפני 2,900 שנה "אנאידה": הנסיכה הפיניקית דידונה ברחה מאחיה שהיה מלך צור (שבדרום לבנון), חיפשה מקום מקלט, וביקשה לרכוש חלקת אדמה על אחד מחופי ים תיכון.

היא הציעה למלך ששלט במקום לרכוש חלקה שלדבריה "אפשר לגדר אותה באמצעות פרוות שור אחת". המלך הסכים, דידונה גזרה את הפרווה לפיסות דקות, קשרה מהן חבל ארוך, וגידרה שטח שעליו בנתה מבצר ולידו עיר בשם "קרתגו" (היום צפון טוניסיה). השאלה היא באיזו צורה על החלקה, המגודרת באמצעות חבל נתון להיות ,כדי ששטחה יהיה מקסימלי?

בפרקים הבאים נלמד כיצד לפתור בעיות קיצון מתחומים שונים.

6.10.1 תחום מספרים

דוגמה 1 רשמו את המספר 50 כסכום של שני מחוברים שסכום חזקת 3 שלהם הוא מינימלי.

מסמנים את המחובר הראשון ב- x, השני, אם כן, יהיה $50 - x$.

סכום חזקות 3 שלהם שווה ל- $x^3 + (50 - x)^3$.

אם נקבע $x = 1$, הסכום יהיה שווה ל- $1^3 + 49^3 = 117,650$.

עבור $x = 2$ נקבל: $2^3 + 48^3 = 110,600$

עבור $x = 30$ נקבל: $30^3 + 20^3 = 35,000$

הבעיה, איפא, היא למצוא את המינימום של הפונקציה $f(x) = x^3 + (50 - x)^3$.

על פי כללי גזרה של פונקרציה מורכבת, מחשבים את נגזרת הפונקציה:

$$f'(x) = 3x^2 + 3\cdot(50 - x)^2\cdot(-1) = 3x^2 - 3\cdot(2500 - 100x + x^2) =$$

$$= 300x - 7500$$

משווים אותה לאפס ומוצאים את ערכי x:

$$300x - 7500 = 0,\ x = 25$$

המספר השני, אם כן, הוא: $50 - 25 = 25$.

מוודאים כי הפתרון הזה הוא אכן נקודת מינימום של הפונקציה:

תחילה מוצאים את ערך הפונקציה בנקודת החשודות כנקודות קיצון שמצאנו:

$$f(25) = 25^3 + 25^3 = 31,250$$

כעת מוצאים את ערך הפונקציה בשתי נקודות סמומות לנקודה x שמצאנו.

עבור $x = 30$ נקבל: $f(30) = 30^3 + 20^3 = 35,000$

ועבור $x = 20$: $f(20) = 20^3 + 30^3 = 35,000$

לכן הפתרון שמצאנו הוא אכן נקודת מינימום של הפונקציה.

דרך אחרת לקביעת סוג של נקודת קיצון היא בדיקת שינוי סימן הנגזרת במעבר דרכה:

כאשר $x = 20$ הנגזרת שווה ל- $f'(20) = 300\cdot20 - 7500 = -1500 < 0$,

וכאשר $x = 30$: $f'(30) = 300\cdot30 - 7500 = 1500 > 0$.

הנגזרת משנה את סימנה ממינוס לפלוס, לכן ההנקודה היא נקודת מינימום.

תשובה: $25 + 25 = 50$.

דוגמה 2 רשמו את המספר 36 כמכפלת שני מספרים חיוביים שסכומם הוא הקטן ביותר.

◀ נסמן את הכופל הראשון ב- x, אז השני יהיה $\frac{36}{x}$.

סכום המספרים שווה ל- $x + \frac{36}{x}$.

הבעיה איפו – מציאת המינימום של הפונקציה $f(x) = x + \frac{36}{x}$.

נשחב את נגזרת הפונקציה: $f'(x) = 1 - \frac{36}{x^2}$,

ונשוואה אותה לאפס, ונמצא את ערכי x:

$$1 - \frac{36}{x^2} = 0,\ \frac{36}{x^2} = 1,\ x^2 = 1,\ x_1 = 6,\ x_2 = -6$$

על פי הנתון, המספרים חיוביים, לכן נשאר פתרון אחד: $x = 6$.

כדי לוודא שנקודה החשודה כנקודת קיצון שנמצאה היא נקודת מינימום, נבדוק את ערכי הפונקציה משני צדי הנקודה החשודה, לדוגמה, $x = 5$ ו- $x = 7$:

$$f(6) = 6 + \frac{36}{6} = 12,\ f(5) = 5 + \frac{36}{5} = 12\frac{1}{5} > 12,\ f(7) = 7 + \frac{36}{7} = 12\frac{1}{7} > 12$$

לכן, הנקודה $x = 6$ היא אכן נקודת מינימום.

דרך אחרת לקביעת סוג של נקודת קיצון היא בדיקת שינוי סימן הנגזרת במעבר דרכה:

כאשר $x = 5$ הנגזרת היא: $f'(5)=1 - \frac{36}{5^2} = 1 - \frac{36}{25} < 0$,

כאשר $x = 7$: $f'(7)=1 - \frac{36}{7^2} = 1 - \frac{36}{49} > 0$

כלומר, הנגזרת משנה סימן מ- "-" ל- "+", ז.א. שהנקודה היא נקודת מינימום.

תשובה: $6\cdot6 = 36$.

תרגילים

144. את המספר 24 רשמו כסכום שני מחוברים כאלה שסכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי.

145. רשמו מספר 36 כסכום של שני מחוברים כאלה שסכום חזקות 3 שלהם יהיה מינימלי.

146. את המספר 20 רשמו כסכום שני מחוברים כאלה שסכום חזקות 3 שלהם יהיה מקסימלי.

147. את המספר 324 רשמו כמכפלת שני גורמים חיוביים כאלה שסכום ריבועיהם יהיה מינימלי.

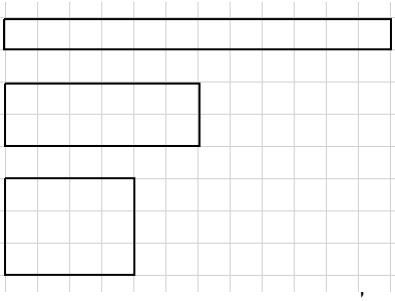
148. את המספר 135 רשמו כסכום של שלושה מחוברים חיוביים כאלה שהיחס של שניים מהם יהיה כמו 1:2 ומכפלתם של שלושתם תהיה מקסימלית.

2.10.2 בעיות קיצון בגיאומטריה

דוגמה 1

צריך לגדר חלקת גינה מלבנית בתיל שאורכו 100 מטרים. מה צריכים להיות אורך ורוחב המלבן כדי ששטחו יהיה גדול ביותר מכל המלבנים האפשריים?

פתרון



קיימים אינסוף מלבנים בעלי היקף של 100 מ׳ ושטח שונה. לדוגמה, לשלושת המלבנים שבשרטוט היקפים שווים, אולם שטח שונה.

כדי למצוא את המלבן בעל שטח מקסימלי, נסמן את אורכו ב- x, ונבטא את שטחו באמצעות x.

את הצלע השנייה נסמן ב- y, ונרשום ביטוי להיקף הנ

$$2x + 2y = 100$$

מכאן מוצאים את y: $y = 50 - x$

מסמנים את השטח ב- A מבטאים אותו באמצעות x: $A = x \cdot y = x \cdot (50 - x)$.

השטח A הוא פונקציה של x: $A(x)$, וכדי למצוא x שעבורו A הוא מקסימלי, מחשבים את הנגזרת $A'(x)$ ומשווים אותה ל- 0:

$$A(x) = 50x - x^2,\ A'(x) = 50 - 2x = 0,\ \underline{x = 25}$$

בודקים האם הפתרון שמצאנו הוא אכן השטח המקסימלי.

נבדוק את ערכי הפונקציה $A(x)$ בנקודה $x = 25$ ובשתי נקודות סמוכות משני צדיה

של הנקודה שמצאנו: $A(25) = 50\cdot25 - 25^2 = 625$

$A(30) = 50\cdot30 - 30^2 = 600$

$A(20) = 50\cdot20 - 20^2 = 600$

כיוון ש- $A(25) > A(30)$ ו- $A(25) > A(20)$, מסיקים כי הנקודה שמצאנו היא אכן נקודת המקסימום של הפונקציה.

תשובה: $x = 25\ m,\ y = 50 - 25 = 25\ m$

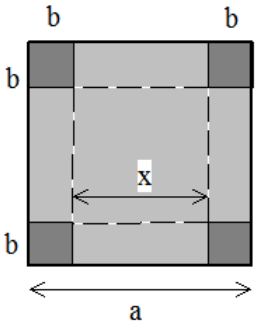
כלומר, צורת המלבן בעל היקף נתון ושטח מקסימלי היא ריבוע.

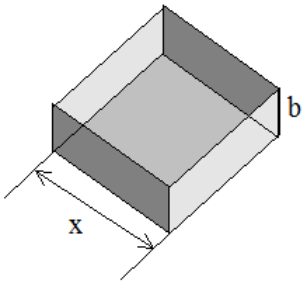
דוגמה 2

מדף קרטון מרובע שצלעו a צריך לבנות קופסה הפתוחה מלמעלה. לצורך כך גוזרים ריבועים קטנים בפינות הדף, ומקפלים את הצדדים.

מה צריך להיות אורך הבסיס של הקופסה שנוצרה, כדי שנפחה יהיה מקסימלי?

פתרון





נסמן את אורך בסיס הקופסה ב- x;

אז אורך צלעות הריבועים שנגזרו שווה ל -

$$b = \frac{1}{2}(a - x)$$

ונפח הקופסה יהיה:

$$V = x^2 \cdot b = \frac{1}{2}(a - x)\cdot x^2$$

כדי למצוא את הגודל x שעבורו הנפח V יהיה מקסימלי, יש למצוא את הנקודות שבהן נגזרת הפונקציה $V(x)$ מתאפסת:

$$V'(x) = [\frac{1}{2}(a - x)\cdot x^2]' = \left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}x^3\right)' = ax - \frac{3}{2}x^2 = 0,$$

$$x\left(a - \frac{3}{2}x\right) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}a.$$

ערכי הפונקציה בנקודות אלה הם:

$$V(x_1) = V(0) = \frac{1}{2}(a - 0)\cdot 0^2 = 0,$$

$$V(x_2) = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2}{27}a^3$$

נבדוק, האם הנקודה $x = \frac{2}{3}a$ היא נקודת מקסימום של $V(x)$: נבחר שתי נקודות משני צדיה של הנקודה: $x = a$ ו- $x = \frac{1}{3}a$, ונחשב את ערכי הפונקציה בנקודות אלה:

$$V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3,\ V(a) = \frac{1}{2}(a - a)\cdot a^2 = 0,$$

$$V\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{3}a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{27}a^3$$

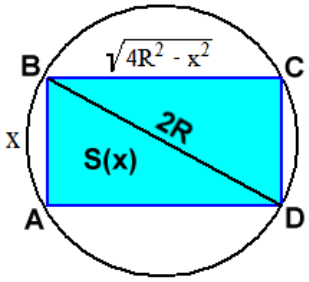
בשתי הנקודות ערכי הפונקציה קטנים מערכה בנקודה x_2.

לכן התשובה היא: נפח הקופסה יהיה מקסימלי כאשר $x = \frac{2}{3}a$.

דוגמה 3

מבין כל המלבנים החסומים במעגל בעל רדיוס R יש למצוא מלבן בעל שטח מקסימלי.

פתרון



כדי למצוא מלבן יש למעשה למצוא את מידותיו, כלומר את אורכו ואת רוחבו.

יהיה מלבן ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.

נסמן $AB = x$. לפי משפט פיתגורס, הצלע השנייה של המלבן תהיה:

$$BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

ושטחו:

$$S(x) = x\cdot\sqrt{4R^2 - x^2}$$

עלינו למצוא x שעבורו פונקציה $S(x)$ תקבל ערך מקסימלי.

כיוון שפונקציה $S(x)$ מכילה נעלם x בתוך שורש ריבועי, יש לוודא שהפתרון יהיה בתחום ההגדרה של הפונקציה.

רושמים את התנאי: $4R^2 - x^2 \geq 0$, ומקבלים: $x^2 \leq 4R^2$, $\underline{x \leq 2R}$.

אפשר לחשב את נגזרת הפונקציה $S(x)$ ולהשוות אותה לאפס.

אולם הנגזרת של $x\cdot\sqrt{4R^2 - x^2}$ היא ביטוי אלגברי ארוך, מה שיוביל לפתרון משוואה מורכבת.

ישנה דרך פשוטה יותר: לחשב נגזרת של $[S(x)]^2$ ולמצוא את הערך של x שעבורו ריבוע השטח הוא מקסימלי. כיוון שפונקציה $Z(S) = S^2$ היא פונקציה עולה עבור $S > 0$, אפשר להסיק כי לערכים גדולים יותר של S מתאימים ערכים גדולים יותר של Z:

אם $S_2 > S_1$ אזי $Z(S_2) > Z(S_1)$.

לכן לערך מקסימלי של S יתאים גם ערך מקסימלי של Z.

מוצאים ערך של x שעבורו $S^2(x)$ יהיה מקסימלי:

$$S^2(x) = x^2\cdot(4R^2 - x^2) = 4R^2\cdot x^2 - x^4,\ [S^2(x)]' = 8R^2x - 4x^3.$$

משווים את הפונקציה לאפס ומוצאים את x:

$$8R^2x - 4x^3 = 0,\ x\cdot(2R^2 - x^2) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = R\sqrt{2}$$

נקודה $x_1 = 0$ היא נקודת קיצון מינימום.

נוודא כי נקודת קיצון שנייה $x = R\sqrt{2}$ היא נקודת מקסימום.

נמצא את ערך הפונקציה $S(x) = x\cdot\sqrt{4R^2 - x^2}$ בנקודה $x = R\sqrt{2}$:

$$S\left(R\sqrt{2}\right) = R\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\cdot R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{4R^2 - 2R^2} = 2R^2$$

נחשב את ערכי הפונקציה בשתי נקודות סמוכות בשני צדיה של $x = R\sqrt{2}$:

$$S(R) = R\cdot\sqrt{4\cdot R^2 - R^2} = R\cdot\sqrt{3R^2} = \sqrt{3}R^2 < 2R^2$$

$$S(2R) = 2R\cdot\sqrt{4R^2 - (2R)^2} = 0 < 2R^2$$

אי לכך, הנקודה $x = R\sqrt{2}$ היא אכן נקודת מקסימום.

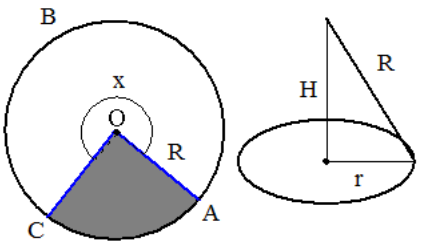
בודקים אם הפתרון בתחום ההגדרה של הפונקציה שמצאנו קודם $x \le 2R$.

כיוון ש- $\sqrt{2} \approx 1.41 < 2$ הפתרון אכן בתחום ההגדרה.

הצלע השנייה במקרה זה היא: $BC = \sqrt{4R^2 - R^2\cdot 2} = R\sqrt{2}$

כלומר, $AB = BC$, והמלבן החסום במעגל בעל שטח מקסימלי הוא ריבוע.

2.10.3 בעיות קיצון בהנדסת המרחב



דוגמה 1 מהעיגול העשוי מִפח גוזרים גזרה מעגלית AOC, ומקפלים את הצורה שנשארה כך שנוצר משפך בצורת חרוט. עבור איזו זווית של הגזרה AOC נפח המשפך יהיה מקסימלי?

פתרון

מסמנים ב- x את הזווית המרכזית של הגזרה ABC שנשארה.

אורך הקשת ABC שווה ל- $R\cdot x$. קשת זו היא היקף בסיס החרוט.

מסמנים את רדיוס הבסיס ב- r ומקבלים עבורו: $2\pi r = Rx$, ולכן $r = \frac{Rx}{2\pi}$.

את גובה החרוט מוצאים באמצעות משפט פיתגורס: $H = \sqrt{R^2 - r^2}$.

לבסוף, נשתמש בנוסחה לנפח של חרוט:

$$V = \frac{1}{3}S\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot H = \frac{\pi\cdot R^2x^2}{3\cdot 4\pi^2}\cdot\sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\cdot\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

מהביטוי עולה שנפח החרוט תלוי בזווית הגזרה x, אשר נמצאת בתוך שורש ריבועי.

מוצאים את תחום ההגדרה של הפונקציה $V(x)$: $4\pi^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow \underline{x \leq 2\pi}$

כיוון שהזווית x חיובית, מקבלים עבור תחום ההגדרה של $V(x)$: $0 \leq x \leq 2\pi$.

נמצא עבור איזה x נגזרת הפונקציה $f(x) = x^2\cdot\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ מתאפסת.

אפשר לפשט את חישוב הנגזרת, אם שמים לב לכך ש:

א. x מופיע רק בריבוע, לכן נגדיר משתנה חדש $y = x^2$, ונמצא y המתאים לערך מקסימלי של $F(y) = y\cdot\sqrt{4\pi^2 - y}$.

ב. לנפח מקסימלי מתאים y כלשהו, ולכן גם לערך מקסימלי של <u>ריבוע הנפח</u> מתאים אותו ערך של y (כיוון ש- V ו- V^2 גדלים או קטנים יחד). אם כך, במקום לחשב נגזרת של $F(y)$, מחשבים נגזרת של $G(y) = F^2(y) = y^2(4\pi^2 - y)$:

$$G'(y) = (4\pi^2y^2 - y^3)' = 8\pi^2y - 3y^2 = 0.$$

למשוואה זו שני פתרונות: $y = 0$ ו-

$$y = \frac{8\pi^2}{3},\quad x = \sqrt{y} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

נוודא כי הפתרון השני הוא אכן נקודת מקסימום.

נבחר שתי נקודות סמוכות משני צדיה של הנקודה "החשודה" $x = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1.63\pi$:

$x_1 = 2\pi$ ו- $x_2 = \pi$ ונשווה את ערכי הפונקציה בשלש הנקודות:

$$f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\cdot\sqrt{4\pi^2 - \left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 4\pi^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{4\pi^2 - 4\pi^2\cdot\frac{2}{3}} =$$

$$= 8\pi^3\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 3.08\cdot\pi^3$$

$$f(2\pi) = (2\pi)^2\cdot\sqrt{4\pi^2 - (2\pi)^2} = 0 < 3.08\cdot\pi^3$$

$$f(\pi) = \pi^2\cdot\sqrt{4\pi^2 - \pi^2} = \pi^3\cdot\sqrt{3} \approx 1.7\,\pi^3 < 3.08\cdot\pi^3$$

הערך של פונקציה בנקודה החשודה לנקודת מקסימום הוא אכן מקסימלי.

מוודאים כי ערך זה נמצא בתחום ההגדרה שמצאנו קודם: $x = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} < 2\pi$.

את הערך של x המתאים לנפח מקסימלי של החרוט קיבלנו ביחידות זווית יחסיות.

כדי להציג x במעלות יש לחלק אותו ב- 2π ולהכפיל ב- $360°$.

לבסוף מקבלים: $x = 360\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 294°$, וזווית הגזרה: $360° - x = 66°$.

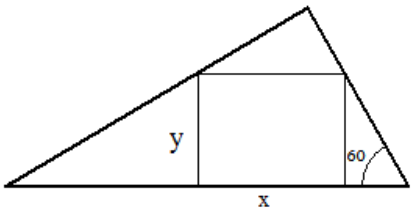
תרגילים (כולל תרגילים אינטראקטיביים)

149. מכופפים קטע של תיל שאורכו 48 מ' באופן שנוצר מלבן.
מה צריכים להיות אורכו ורוחבו של המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי?

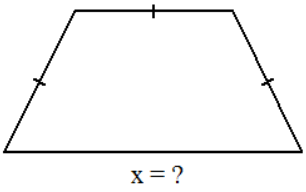
150. שטח המלבן 64 סמ"ר. מה צריכים להיות אורך צלעותיו בכדי שהיקפו יהיה מינימלי?

151. יש לגדר חלקה מלבנית ששטחה 600 מ"ר ולחלק אותה לשתי חלקות בעלות שטח שווה.
מה צריכים להיות אורך ורוחב החלקה כדי שאורך כל הגדר יהיה מינימלי?

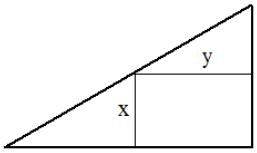
152. מלבן חסום במשולש ישר זווית באופן שבסיס המלבן נמצא על היתר של המשולש.
אורך היתר 20 ס"מ, ואחת מזוויות המשולש היא $60°$.
מה צריכים להיות אורך ורוחב המלבן כדי ששחטו יהיה מקסימלי?



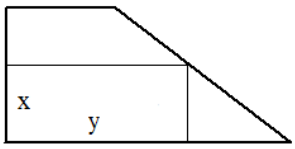
153. בטרפז שווה שוקיים אורך הבסיס הקטן שווה לאורך השוקיים : 46 ס״מ. מצאו את אורך הבסיס הגדול שעבורו שטח הטרפז יהיה מקסימלי.



154. מצאו צלעות של מלבן בעל שטח מקסימלי החסום במשולש ישר זווית, שצלעותיו 22, 14, 26 ס״מ ובעל זווית ישרה משותפת עם המלבן.



155. מצאו צלעות של מלבן בעל שטח מקסימלי החסום בטרפז ישר זווית שבסיסיו 28 ו- 16 ס״מ, גובה - 18 ס״מ ובעל זווית ישרה משותפת עם המלבן.

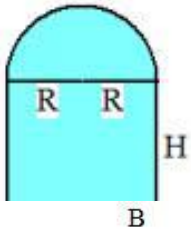


156. על מְכל פתוח בצורת תיבה ישרה בעלת בסיס ריבועי להכיל 13.5 ליטרים של נוזל. באלו מידות על המְכל להיות כדי שכמות החומר שממנו נבנה תהיה מינימלית?

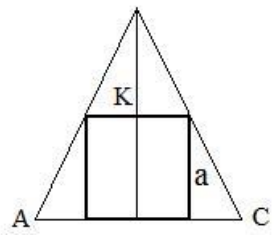
157. משולש שווה שוקיים, שבסיסו 60 ס״מ וצלעו 50 ס״מ, חוסם מלבן בעל שטח מקסימלי. שני קדקודי המלבן נמצאים על בסיס המשולש, ושניים האחרים – על צלעותיו. מצאו את אורך צלעות המלבן.

158. הוכיחו שמְכל המשולשים שווי השוקיים החסומים במעגל נתון, השטח של משולש שווה צלעות הוא הגדול ביותר.

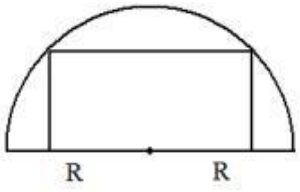
159. לחלון צורה של מלבן המושלם בחצי עיגול מלמעלה. היקף החלון 5.4 מטר. מצאו את מידות החלון – גובה H ורדיוס העיגול R - שעבורן שטח החלון מקסימלי.



160. ריבוע בעל צלע (ס״מ) a = 22 חסום במשולש שווה שוקיים באופן שצלע אחת של הריבוע נמצאת על בסיס המשולש. מצאו את אורך הקטע BK שעבורו שטח המשולש מינימלי.

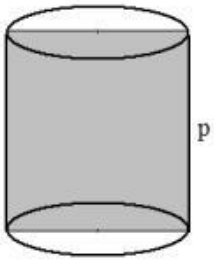


161. מכל המלבנים החסומים בחצי מעגל בעל רדיוס (ס"מ) R = 13 באופן שצלע אחת מונחת על הקוטר, בחרו מלבן בעל שטח מקסימלי ומצאו את שטחו.



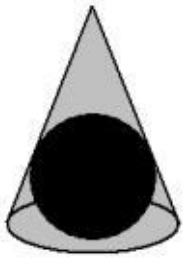
162. מצאו את שטח פנים הקטן ביותר של הגליל בעל נפח של (סמ"ק) V = 140.

הערה נוסחת נפח הגליל: $V = \pi r^2 \cdot H$, r – רדיוס הבסיס, H – גובה הגליל.



163. מכל הגלילים בעלי היקף של חתך מרכזי p נבחר הגליל בעל נפח מרבי. מצאו את נפח הגליל הזה.

164. מצאו את גובה החרוט בעל נפח מינימלי שחוסם כדור בעל רדיוס R.



הערה: נוסחת נפח החרוט:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$$

r – רדיוס הבסיס, H – גובה החרוט.

2.10.4 בעיות קיצון בכלכלה

דוגמה 1

סוחר מוכר כל שבוע 60 מוצרים ב - 40 ₪ למוצר.

אחרי הנחה של חצי שקל למוצר הוא מצליח למכור שני מוצרים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר המוצר כדי שהכנסתו השבועית של הסוחר תהיה מקסימלית?

פתרון

נסמן את מחיר המוצר ב- x.

שיעור ההוזלה: $40 - x$ ₪, מספר ההנחות בחצי שקל: $2\cdot(40 - x)$,

כמות המוצרים הנוספים שיימכרו בשבוע בעקבות ההוזלה: $2\cdot2\cdot(40 - x)$,

הכמות הכללית של המוצרים שיימכרו: $4\cdot(40 - x) + 60$.

ההכנסה השבועית היא מכפלת מחיר המוצר בכמות המוצרים שנמכרו:

$$M = M(x) = x\cdot(60 + 4\cdot(40 - x)) = 220x - 4x^2$$

ההכנסה M היא פונקציה של x. נמצא עבור איזה x נגזרת של M מתאפסת:

$$M'(x) = 220 - 8x = 0 \Rightarrow \underline{x = 27.5\ (₪)}$$

כדי לוודא שקיבלנו ערך מקסימלי, בודקים את ערכי הפונקציה משני צדיה של הנקודה שמצאנו:

$$M(27.5) = 220\cdot 27.5 - 8\cdot 27.5^2 = 3025$$

$$M(26) = 220\cdot 26 - 8\cdot 26^2 = 3016,\ M(28) = 220\cdot 28 - 8\cdot 28^2 = 3024$$

דרך אחרת לוודא שמצאנו את נקודת מקסימום היא לזהות שהפונקציה $M(x)$ ריבועית, והמקדם a שלה שלילי ($a = -4$), לכן ענפיה מכוונים כלפי מטה, ונקודת הקיצון שלה היא מקסימום.

תרגילים

165. חברת תרופות מייצרת פניצילין נוזלי ומשווקת אותו ביחידות גדולות ב- 200 ₪ ליחידה. עלות הייצור הכוללת של x יחידות בשקלים מוגדרת על ידי הפונקציה:

$$f(x) = 0.003x^2 + 80x + 500{,}000$$

נפח הייצור של החברה הוא לכל היותר 30,000 יחידות בפרק זמן נתון.
כמה יחידות של פניצילין יש לייצר ולמכור בפרק זמן זה כדי להגיע לרווח מרבי?

166. מועדון ספורט מציע מנוי שנתי תמורת 800 ₪, אם מספר המינויים יהיה 100 או פחות. הצטרפותו של כל מנוי נוסף מפחיתה את מחיר המנוי לכל המנויים ב- 5 ₪.

א) כמה מנויים על המועדון למכור כדי שהכנסותיו תהיינה מקסימליות?

ב) כמה מנויים על המועדון למכור כדי שהכנסותיו תהיינה מקסימליות, אם מספר המנויים מוגבל ל- 120?

167. סוחר בגדים ערך מחקר וגילה שבכל קנייה של חולצות טריקו מן היבואן, שעבורן שילם 20 ₪ לחולצה 10% מהחולצות נפגמות במהלך ההובלה ועליו לזרוק אותן, ו- 20% מהנותרות עליו למכור כסוג ב׳ ב-10 ₪ פחות מן המחיר ששילם עבורן.

הסוחר יכול לרכוש מן היבואן עד 300 חולצות בשבוע, והוא חייב לקנות לפחות חולצה אחת.

נסמן ב- x את מספר החולצות שקנה הסוחר בשבוע מסוים, ואת מחיר החולצה לצרכן באופן הזה: $40 - 0.1x$ ₪.

כמה חולצות על הסוחר לקנות בשבוע כדי שהכנסתו תהיה מקסימאלית ?

2.11 שימושי הנגזרת בפתרון בעיות תנועה

כאשר מכונית נוסעת במהירות קבועה v, היא עוברת במשך הזמן t דרך s השווה ל-

$$s = v \cdot t \qquad (1)$$

לדוגמה, אם מהירות המכונית היא – $v = 60$ קמ״ש, אז בזמן (ש׳) $t = 0.5$ היא תעבור מרחק של - $s = 60 \cdot 0.5 = 30$ ק״מ

בבעיות תנועה אנו משתמשים בנוסחה (1) כאשר מהירות קבועה.

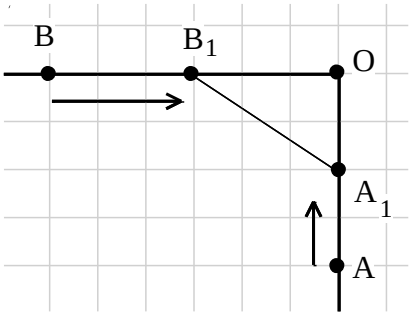
דוגמה 1

שתי מכוניות נוסעות בשני כבישים ישרים, שהזווית ביניהם היא זווית ישרה, ומתקרבות לצומת. מכוניות נוסעות במהירות קבועה של 40 ו- 50 קמ״ש בהתאם.

ברגע מסוים היו המרחקים מהמכוניות עד לצומת שווים ל- 2 ו- 3 ק״מ בהתאמה.

כעבר כמה זמן מרגע זה המרחק ביניהן יהיה מינימלי?

פתרון



נשרטט באופן סכמתי את נתוני הבעיה:

O – צומת, $AO = 2$, $BO = 3$

נסמן ב- t את פרק הזמן הנעלם, וב- A_1 ו- B_1 את מקומותיהן של המכוניות כעבור פרק זמן זה.

נשתמש בנוסחת הדרך (1) כדי לחשב את קטעי הדרך שאותם עברו המכוניות בזמן t: $AA_1 = 2 \cdot t$, $BB_1 = 3 \cdot t$

המרחקים מהצומת יהיו ברגע זה בהתאם:

$$A_1O = AO - AA_1 = 2 - 2t$$

$$B_1O = BO - BB_1 = 3 - 3t$$

מרחק בין המכוניות ברגע t הוא היתר A_1B_1 של משולש ישר זווית A_1OB_1 .

על פי משפט פיתגורס רושמים:

$$s^2 = (A_1B_1)^2 = A_1O^2 + B_1O^2 = (2 - 2t)^2 + (3 - 3t)^2 = 13(t^2 - 2t + 1)$$

עלינו למצוא את הערך של t שעבורו ערך הפונקציה s(t) יהיה מינימלי.

ברור, שכאשר s יהיה מינימלי גם s^2 יהיה מינימלי.

כיוון ש- $s^2 = 13\cdot(t^2 - 2t + 1)$,

הנגזרת שווה ל- $26t - 26 = 0$, מכאן מקבלים: $\underline{t = 1}$ (שעה).

נבדוק, אם מצאנו ערך מינימלי של s:

כאשר $t = 1$ מקבלים: $s^2 = 13\cdot(t^2 - 2t + 1) = 13\cdot(1^2 - 2\cdot1 + 1) = 0$

עבור $t = 2$ נקבל: $s^2 = 13\cdot(2^2 - 2\cdot2 + 1) = 13 > 0$

עבור $t = 0.5$ נקבל: $s^2 = 13\cdot(0.5^2 - 2\cdot0.5 + 1) = 13\cdot0.25 > 0$

אי לכך, $t = 1$ היא אכן נקודת מינימום של הפונקציה s(t).

כאשר מכונית נוסעת במהירות קבועה ועוברת בכל 10 שניות 200 מטרים, אפשר לחשב את גודל המהירות באמצעות הנוסחה:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200}{10} = 20\ \frac{m}{sec}$$

אולם ברור, שאם המכונית מאיצה, כלומר עוברת בכל שנייה מרחקים הולכים וגדלים, אז לא ניתן לחשב את מהירותה על פי אותה הנוסחה (בגלל שגודל המהירות משתנה מרגע לרגע).

נניח שידוע לנו מיקום המכונית x (כלומר מרחק מראשית ציר התנועה) בכל רגע הזמן t: $x(t)$. במשך פרק זמן קטן Δt המכונית תעבור מרחק קטן Δx.

כיוון שבמשך זמן קצר זה מהירותה של המכונית לא הספיקה להשתנות באופן משמעותי, אפשר לחשב אותה בקירוב באמצעות הנוסחה למהירות קבועה:

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

התוצאה תהיה מדויק יותר ככל שפרק הזמן Δx יהיה קטן מאוד;

אפשר לרשום את הביטוי למהירות המכונית ברגע t בדיוק (הנקראת מהירות רגעית) בצורה הבאה:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = x'(t)$$

ובכן, **מהירות רגעית של גוף** (כלומר מהירות ברגע t מסוים) **שווה לנגזרת של פונקציית המקום בזמן**.

דוגמה 2

תלות מקום המכונית בזמן הנסיעה ניתנת על-ידי הפונקציה $x(t) = 0.3 \cdot t^2 + 8$,

כאשר x נמדד במטרים ו- t – בשניות.

א. היכן הייתה המכונית בהתחלת הנסיעה $(t = 0)$?

ב. מה הייתה מהירות המכונית לאחר 5 שניות של הנסיעה?

ג. מה הייתה מהירות המכונית לאחר 15 שניות של הנסיעה?

פתרון

א. $x(0) = 0.3 \cdot 0^2 + 8 = 8 \text{ m}$

ב. $v(t) = x'(t) = 0.3 \cdot 2t = 0.6\,t$; $v(5) = 0.6 \cdot 5 = 3 \text{ m/sec}$

ג. $v(15) = 0.6 \cdot 15 = 9 \text{ m/sec}$

דוגמה 3

זורקים אבן למעלה במהירות התחלתית של 20 מטר/שנייה.

גובה האבן h בכל רגע t של המעוף ניתן על-ידי הנוסחה $h(t) = 20t - 5 \cdot t^2$,

כאשר h נמדד במטרים ו- t – בשניות.

א. שרטטו גרף של גובה האבן כפונקציה של זמן המעוף;

ב. מצאו את זמן העלייה של האבן עד לנקודת שיא וזמן המעוף כולו באמצעות הגרף;

ג. מצאו את מהירות האבן בכל רגע $v(t)$ (נוסחת המהירות) ושרטטו גרף של $v(t)$;

ד. מה הייתה מהירות האבן בנקודת שיא הגובה וברגע נפילתה בקרקע?

פתרון

א. התלות של h ב- t היא פונקציה ריבועית, וצורת הגרף שלה – פרבולה.

כיוון שהמקדם ליד t^2 הוא שלילי (-5), ענפי הפרבולה מכוונים כלפי מטה ("בוכה").

$$v(4) = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \ \frac{m}{sec}$$

נקודות חיתוך עם הצירים:

$$t = 0: \ y = 20 \cdot t - 5 \cdot t^2 = 0$$

$$y = 0: \ 20t - 5t^2 = 0, \ 4t - t^2 = 0, \ t \cdot (4 - t) = 0, \ t_1 = 0, \ t_2 = 4$$

מקום הקדקוד C:

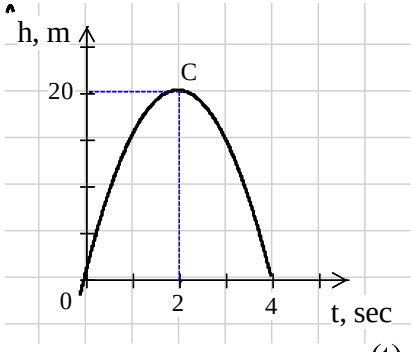
פרבולה סימטרית ביחס לציר העובר דרך הקדקוד, מכאן מסיקים שציר הסימטריה עובר בנקודה אמצעית של הקטע בין t_1 ל- t_2 כלומר בנקודה

$$t_C = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2 \ \text{(ש')}$$

ובגובה:

$$h_c = h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 40 - 20 = 20 \ \text{(מ')}$$

נשרטט את הגרף:

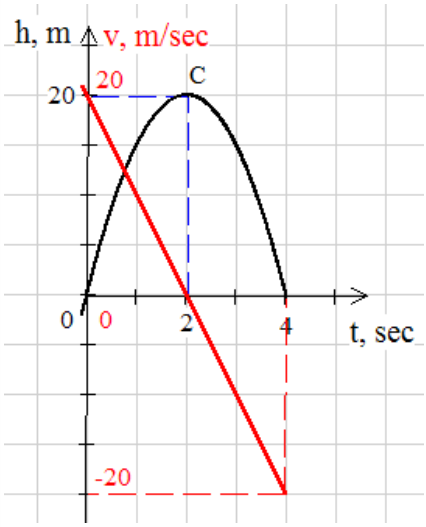


ב. בגרף רואים שזמן מעוף עד לשיא הגובה הוא 2 שניות, וזמן המעוף כולו הוא 4 שניות.

ג. כדי למצוא את נוסחת המהירות, נחשב את הנגזרת של h(t):

$$v(t) = h'(t) = (20t - 5t^2)' = 20 - 5 \cdot 2t = 20 - 10t$$

נשרטט גרף של מהירות (בצבע אדום) יחד עם גרף של גובה:



ד. נקודת שיא הגובה היא: $t = 2$ (שניות).

נציב בנוסחת המהירות ונמצא:

$$v(2) = 20 - 10 \cdot 2 = 0$$

(התוצאה ברורה: בשיא הגובה האבן נעצרת לרגע ומחליפה את כיוון התנועה כלפי מטה);

המהירות ברגע הפגיעה בקרקע:

$$v(4) = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \ (m/sec)$$

המסקנה: מהירות הנפילה שווה בגודלה למהירות הזריקה, אולם כיוונה נגדי (סימן מינוס).

תרגילים

168. מקומו x של רוכב האופניים בכל רגע זמן t נתון על ידי הנוסחה:

$$x = 12t + 0.3$$

כאשר המרחק x מנקודת ההתחלה של המרוץ נמדד בקילומטרים והזמן t – בשעות.

א. מה מהירותו של רוכב האופניים בקמ"ש (קילומטרים לשעה) בכל רגע?

ב. היכן היה רוכב האופניים בתחילת המרוץ?

ג. מה יהיה מקומו כעבור שעה ורבע?

ד. שרטטו גרפים של מקום ומהירות כפונקציה של זמן.

169. כדור נזרק כלפי מעלה מהצוק שגובהו 150 מ' מעל הקרקע.

מהירות הזריקה היא 15 מטר/שנייה.

מקומו של הכדור מעל הקרקע h תלוי בזמן הנפילה t על פי הנוסחה:

$$h = 150 + 15t - 4.9 \cdot t^2$$

כאשר h נמדד במטרים ו- t – בשניות.

א. שרטטו גרף של גובה כפונקציה של זמן $h(t)$;

ב. מהגרף מצאו את הגובה המקסימלי שאליו יגיע הכדור, את זמן העלייה וזמן כולל של המעוף;

ג. פיתחו את הנוסחה למהירות הכדור כתלות בזמן $v(t)$;

ד. בהסתמך על העובדה שבשיא הגובה מהירות שווה לאפס, מצאו מנוסחת המהירות את זמן העלייה והשוו אותו עם הזמן שמצאתם מהגרף של $h(t)$;

ה. מה תהיה מהירות הכדור כעבור 2 שניות של המעוף?

170. גובה האבן שנזרקה כלפי מטה במהירות התחלתית של 20 מ'/שנייה ממגדל שגובהו 150 מ' משתנה עם הזמן לפי הנוסחה: $h(t) = 150 + 20t - 5t^2$, כאשר h נמדד במטרים ו- t בשניות.

א. פיתחו את הנוסחה למהירות הכדור כתלות בזמן $v(t)$;

ב. מה הייתה מהירות האבן כעבור 2 שניות של נפילתה?

ג. באיזה גובה הייתה האבן כעבור 2 שניות מתחילת הנפילה?

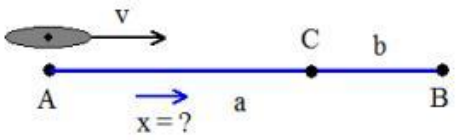
ד. בנו גרף של גובה האבן כפונקציה של זמן נפילה;

ה. מצאו באמצעות הגרף את זמן הנפילה;

ו. בנו גרף של מהירות האבן כפונקציה של זמן נפילה;

ז. מצאו באמצעות הגרף את מהירות הפגיעה הקרקע.

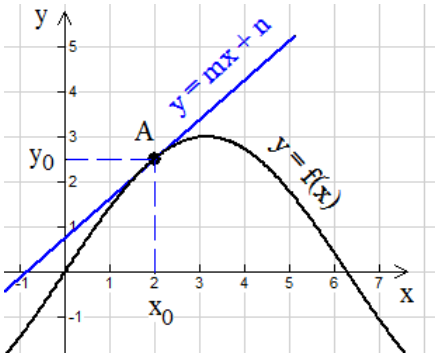
171. אנייה שטה מנמל A לנמל B הנמצא במרחק a ממנו וחוזרת לנמל C. מרחק בין הנמלים BC = b.



מהירות האנייה במים עומדים שווה ל- v.

המים בנהר זורמים בכיוון מ A –ל- B. עבור איזו מהירות של זרימת המים תעבור האנייה את המסלול ABC (מ- A ל- B וחזרה ל- C) בזמן הקצר ביותר?

2.12 הקשר בין משיק לגרף הפונקציה לבין הנגזרת



לנגזרת $f'(x)$ של פונקציה יש משמעות גיאומטרית כשיפוע של משיק לגרף הפונקציה באותה נקודה x: $f'(x) = m$, לכן אפשר לרשום את משוואת המשיק על פי משוואת הישר, ששיפועו m, אשר עובר דרך נקודה נתונה $A(x_0, y_0)$ על גרף הפונקציה:

$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad (1)$$

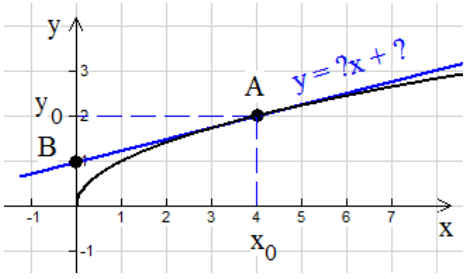
כאשר $m = f'(x_0)$ ו- $y_0 = f(x_0)$,

כלומר, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה מסוימת $A(x_0,y_0)$ על גרף הפונקציה שווה לערך הנגזרת באותה הנקודה $f'(x_0)$.

חשוב לציין שהנקודה A שייכת בו-זמנית לשתי הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לכן, כדי למצוא את ערכו של y_0 המופיע במשוואה (1), מציבים את x_0 במשוואת הפונקציה $y_0 = f(x_0)$.

דוגמה 1



מצאו את משוואת המשיק לגרף

הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ בנקודה A על גרף

הפונקציה בעלת שיעור $x = 4$.

פתרון

א) מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

ב) מחשבים את ערכה של הנגזרת בנקודה $x_0 = 4$: $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$;

ג) מחשבים את y_0: $y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{4} = 2$;

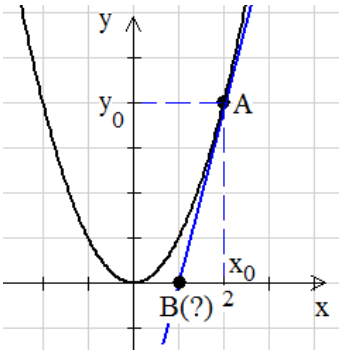
ד) רושמים את משוואת המשיק: $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$;

ה) בודקים: בוחרים x כלשהו, לדוגמה $x = 0$, מחשבים y לפי המשוואה:

$$y(0) = \frac{1}{4}(0 - 4) + 2 = 1$$

ו) מוודאים שהנקודה $B(0, 1)$ אכן נמצאת על המשיק.

דוגמה 2 (כיצד לשרטט בקלות משיק לפרבולה)



מצאו נקודת חיתוך עם ציר x של משיק לפרבולה

$y = x^2$ בנקודה A על גרף הפונקציה בעלת שיעור

$x_0 = 2$.

פתרון מוצאים את משוואת המשיק:

א) $y'(x) = 2x$

ב) $m = y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

ג) $y_0 = (x)^2_{x=2} = 4$

ד) $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$

ה) בנקודת החיתוך עם ציר-x מתקיים: $y = 0$. מציבים במשוואת המשיק:

$$0 = 4x - 4 \rightarrow \underline{x = 1 = x_0/2}$$

באופן כללי, עבור המשיק לפרבולה בנקודה x_0 נקבל:

$$y'(x_0) = 2x_0 = m, \quad y_0 = x_0^2,$$

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2 + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2 = 0$$

$$x = \frac{x_0}{2}$$

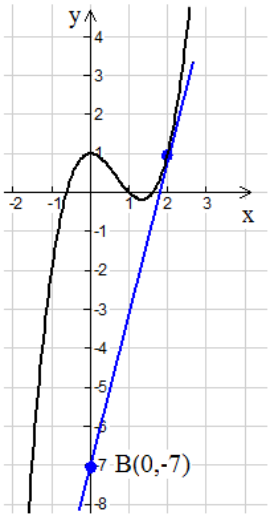
כלומר, שיעור נקודת החיתוך של משיק לפרבולה $y = x^2$ בנקודה x_0 עם ציר x שווה ל- $\frac{x_0}{2}$.

דוגמה 3

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

בנקודה על הגרף בעלת שיעור $x = 2$.

פתרון



א) נתון: $x_0 = 2$.

ב) מחשבים את y_0: $y_0 = f(x_0) = 2^3 - 2\cdot2^2 + 1 = 1$;

ג) מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 4x$;

ד) מחשבים את ערך הנגזרת בנקודה $x_0 = 2$:

$$f'(2) = 3\cdot2^2 - 4\cdot2 = 4;$$

ה) מציבים במשוואת הישר: $y - 1 = 4(x - 2)$;

ו) רושמים את משוואת המשיק: $\underline{y = 4x - 7}$.

ז) בדיקה: בוחרים x כלשהו, לדוגמה $x = 0$, מחשבים על פי המשוואה

$$y = 4\cdot0 - 7 = -7.$$

ח) מוודאים שהנקודה $B(0, -7)$ אכן נמצאת על המשיק.

תרגילים

172. מצאו את הערכים של m ו- n אם ידוע שהישר $y = mx + n$ עובר דרך הנקודה (x_0, y_0) ויוצר זווית α עם ציר x:

א) $x_0 = 2, y_0 = -3, \alpha = 45°$ ב) $x_0 = -3, y_0 = 2, \alpha = 45°$

ג) $x_0 = 1, y_0 = 3, \alpha = 30°$ ד) $x_0 = -2, y_0 = -3, \alpha = 60°$

173. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = f(x)$ בנקודה $x = x_0$:

א) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1$ ב) $f(x) = \frac{1}{3}x^3,\ x_0 = -1$

ג) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2}$ ד) $f(x) = 2\sqrt{x},\ x_0 = 3$

ה) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x,\ x_0 = 2$ ו) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1,\ x_0 = -2$

174. רשמו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = f(x)$ בנקודה בעלת שיעור x – השווה ל- $x = x_0$:

א) $f(x) = x^2 + x + 1,\ x_0 = 1$ ב) $f(x) = x - 3x^2,\ x_0 = 2$

ג) $f(x) = x^3 + 1,\ x_0 = 0,\ x_0 = 1$ ד) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 3,\ x_0 = -2$

ה) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$ ו) $f(x) = \sqrt{2 - x},\ x_0 = -7$

175. הוכיחו כי לגרפים שתי הפונקציות הנתונות יש נקודה משותפת ומשיק משותף בנקודה זו. מצאו את משוואת המשחק הזה:

א) $y = x^4$ ו- $f(x) = x^6 + 2x^2$ ב) $y = x^4$ ו- $f(x) = x^3 - 3x^2$

ג) $y = (x + 2)^2$ ו- $f(x) = 2 - x^2$ ד) $y = x(2 + x)$ ו- $f(x) = x(2 - x)$

176. מצאו נקודות על גרף הפונקציה $y = f(x)$ שהמשיק לגרף בנקודות אלה מקביל לישר $y = mx$:

א) $f(x) = \sqrt{3x - 1},\ m = \frac{3}{4}$ ב) $f(x) = x - \frac{1}{x},\ m = \frac{1}{2}$

ג) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1,\ m = -1$ ד) $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ m = 0$

177. מצאו נקודות שבהן המשיקים לגרפים של הפונקציות הבאות הם מקבילים:

$f(x) = x^3 - x - 1$ ו- $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

רשמו את משוואות המשיקים האלה.

178. מצאו את המשיקים המשותפים לגרפים של פונקציות:

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ ו- $g(x) = -x^2 + 6x - 10$

179. שני משיקים המקבילים לגרף הפונקציה $y = x^3 - 6$ חותכים את צירי הקואורדינאטות: האחת בנקודות A ו – B, והשנייה - בנקודות C ו – D.

מצאו את שטח המשולש AOB (הנקודה O היא ראשית הצירים), אם ידוע שהוא קטן פי 4 משטח המשולש COD.

2.13 בניית סקיצה של גרף הפונקציה – סיכום ודוגמאות

עדיף להתחיל את בניית גרף הפונקציה בחקירת הפונקציה על פי השלבים האלה:

- למצוא את תחום ההגדרה;
- לבדוק זוגיות;
- למצוא נקודות חיתוך עם הצירים;
- למצוא תחומי חיוביות ושליליות;
- לחשב את נגזרת הפונקציה, ובאמצעותה למצוא את
  - נקודות קיצון;
  - תחומי עלייה וירידה;
  - נקודות מקסימום ומינימום בקצות תחום ההגדרה (כאשר מדובר בקטע סגור או חצי סגור).

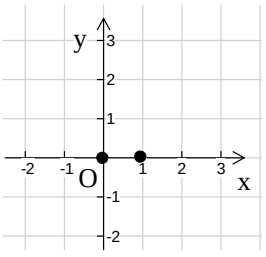
את תוצאות החקירה כדאי לרשום בטבלה מסכמת.

דוגמה 1 בנו גרף של פונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

◀ כיוון שאין שורשים או שברים עם משתנה במכנה, תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל ציר x.

בדיקת זוגיות: $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2x^2 - x \neq f(x), \neq -f(x)$

לכן הפונקציה איננה זוגית ואיננה אי זוגית.

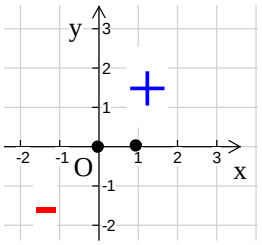


מוצאים נקודות חיתוך עם ציר y: $f(0) = 0$, $\underline{O(0,0)}$.

מוצאים נקודות חיתוך עם ציר x: $f(x) = 0$,

$x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0,\ x(x-1)^2 = 0,$

$\underline{x_1 = 0,\ x_2 = 1}$.



מוצאים את תחומי החיוביות ושליליות:

כאשר $x < 0$: $(x-1)^2 > 0$, לכן $x(x-1)^2 < 0$; $f(x) < 0$;

כאשר $0 < x < 1$: $x > 0$, לכן $x(x-1)^2 > 0$; $f(x) > 0$;

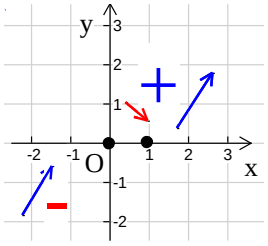
כאשר $x > 1$: $x > 0$, אזי $x(x-1)^2 > 0$; $f(x) > 0$.

כלומר $f(x) < 0$ בתחום $x < 0$, ו- $f(x) > 0$ בתחום $0 < x$.

מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ומוצאים את נקודות קיצון:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = 1$$

כדי לקבוע את תחומי העלייה והירידה, נפרק את הטרינום $3x^2 - 4x + 1$ לגורמים: $3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$



כאשר $x < \frac{1}{3}$ ו- $x > 1$ הנגזרת חיובית, לכן בתחומים אלה $f(x)$ עולה.

כאשר $\frac{1}{3} < x < 1$ הנגזרת שלילית, לכן בתחם זה $f(x)$ יורדת.

כיוון ש $x = \frac{1}{3}$ היא נקודות קיצון, כאשר משמאלה $f(x)$ עולה, ומימינה יורדת, מסיקים שהיא נקודת מקסימום.

מחשבים את ערכה של הפונקציה בנקודה זו: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

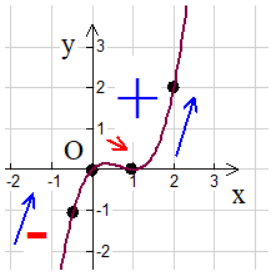
נקודת קיצון שנייה: $x = 1$ היא נקודת מינימום, כיוון שמימינה הפונקציה עולה ומשמאלה יורדת.

ערך הפונקציה שנקודה זו: $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 = 0$.

כדי לדייק יותר בבניית קו הגרף מחשבים את ערכי הפונקציה בעוד שתי נקודות, לדוגמה:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}, \; f(2) = 2$$

כעת משרטטים את סקיצת הגרף:



דוגמה 2 בנו גרף של פונקציה $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

◀ תחום ההגדרה של הפונקציה – כל x מלבד $x = 0$, כלומר: $\underline{x \neq 0}$.

בדיקת זוגיות: $f(-x) = -x + \frac{4}{(-x)} = -x - \frac{4}{x} = -\left(x + \frac{4}{x}\right) = -f(x)$

כלומר הפונקציה <u>אי זוגית</u>, לכן תחילה נחקור אותה ונבנה גרף בתחום $x > 0$.

מוצאים נקודות חיתוך עם ציר y: <u>אין</u>, כיוון ש- $f(0)$ איננה מוגדרת.

מוצאים נקודות חיתוך עם ציר x: $f(x) = 0$,

$$f(x) = x + \frac{4}{x} = 0,\ x = -\frac{4}{x},\ x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{אין פתרון}}$$

כלומר לפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים.

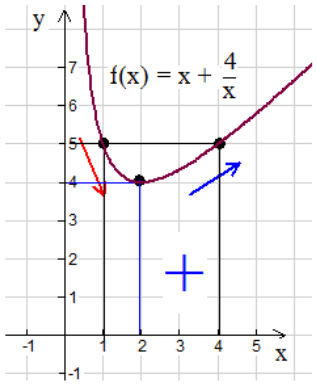
מוצאים תחומי חיוביות ושליליות:

כאשר $x > 0$, ערכי הפונקציה חיוביים: $x + \frac{4}{x} > 0,\ \frac{4}{x} > 0,\ x > 0$.

מחשבים את הנגזרת: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$,

ומוצאים את נקודות קיצון: $1 - \frac{4}{x^2} = 0,\ x^2 = 4,\ x_1 = 2,\ x_2 = -2$

בתחום $x > 0$ יש נקודת קיצון אחת: $\underline{x = 2}$.



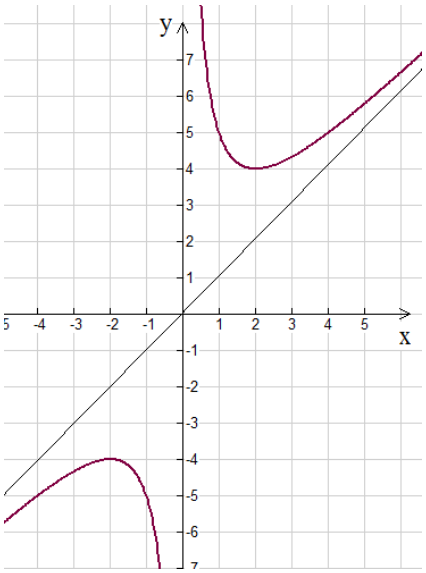
כאשר $x > 2$, הנגזרת חיובית, לכן בתחום זה הפונקציה <u>גדלה</u>.

בקטע $0 < x < 2$ הנגזרת שלילית, לכן בתחום זה הפונקציה <u>קטנה</u>.

מסיקים כי נקודת קיצון $x = 2$ היא <u>נקודת מינימום</u>.

מוצאים את ערך הפונקציה בנקודה זו: $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

מוצאים את ערכי הפונקציה בעוד שתי נקודות: $f(1) = 5,\ f(4) = 5$, ומשרטטים את סקיצת הגרף בתחום $x > 0$:



גרף הפונקציה בתחום $x < 0$ הוא סימטרי ביחס לראשית הצירים לגרף בתחום $x > 0$, לכן גרף הפונקציה בכל התחום (שני הקטעים, $x > 0$ ו- $x < 0$) נראה כך:

2.14 פונקציה קדומה

מכונית מתחילה לנוע לאחר עצירה ברמזור. נמדוד את מהירותה בכל שנייה ונרשום בטבלה.

t זמן (שניות)	v מהירות (מטרים/ שנייה)	s מרחק (מטרים)
1	3	?
2	6	?
3	9	?
4	12	?
5	15	?

כיצד נדע מה המרחק שנסעה המכונית לאחר 5 שניות? או לאיזה מרחק תגיע כעבור 10 שניות, בהנחה שמהירותה תשתנה בקצב זהה?

אילו נסעה המכונית במהירות קבועה, יכולנו להשתמש בנוסחה: $s = v \cdot t$.

כיוון שהמכונית מגבירה את מהירותה, הנוסחה אינה נכונה.

נסמן תלות המרחק s בזמן הנסיעה t כפונקציה $s(t)$.

ראינו שמהירות המכונית בכל רגע שווה לנגזרת של מרחק בזמן: $v(t) = s'(t)$.

כלומר, לו ידענו כיצד משתנה המרחק בזמן $s(t)$, אפשר היה לחשב כיצד משתנה המהירות v בזמן t.

כעת לפנינו **בעיה הפוכה**: ידוע לנו כיצד משתנה בזמן הנגזרת $v(t)$, ועלינו למצוא את הפונקציה $s(t)$ שנגזרתה $v(t)$ ידועה.

פונקציה $s(t)$ שבה $s'(t) = v(t)$ מכונה **פונקציה קדומה** לפונקציה $v(t)$.

ככלל, פונקציה $F(x)$ כזו שהנגזרת שלה שווה לפונקציה נתונה $f(x)$ עבור כל x מתחום ההגדרה של $f(x)$, מכונה **פונקציה קדומה** ל- $f(x)$:

$$\mathbf{F'(x) = f(x)}$$

דוגמה 1 אם נתון $v(t) = 2t$ אזי הפונקציה $s(t) = t^2$ היא פונקציה קדומה של $v(t)$, כיוון ש- $s'(t) = (t^2)' = 2t$.

אם $f(x) = x^3$, אזי הפונקציה הקדומה היא $F(x) = \frac{x^4}{4}$ כיוון ש- $F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$

ובכלל: אם $f(x) = x^n$ אזי $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ כיוון ש-

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(x^{n+1}\right)' = \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} = x^n$$

דוגמה 2 $f(x) = x^2$ $(n = 2)$:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

דוגמה 3 הוכיחו שכל הפונקציות:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3}, F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \ F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4$$

הן פונקציות קדומות לפונקציה $f(x) = x^2$.

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (1)' = x^2$$

$$F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 4\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (4)' = x^2$$

כלומר, <u>כל אחת מהפונקציות הנ"ל היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$</u>.

מאופן ההוכחה ברור, **שכל פונקציה** מסוג $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = x^2$. הדבר נובע מהעובדה שנגזרת של קבוע שווה לאפס.

אם $F_1(x)$ ו- $F_2(x)$ הן שתי פונקציות קדומות לפונקציה $f(x)$:

$$F_1'(x) = f(x) \text{ ו- } F_2'(x) = f(x)$$

אז ההפרש שלהן שווה לאפס: $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$.

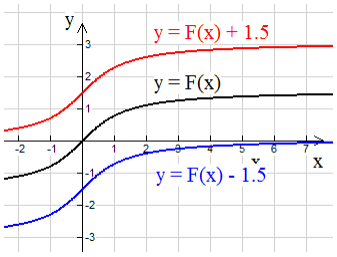
לפי כללי הגזירה: $F_1'(x) - F_2'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$

אם נגזרת של פונקציה שווה לאפס, הפונקציה קבועה:

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \ \underline{F_1(x) = F_2(x) + C}$$

כלומר: אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, אזי כל פונקציה קדומה אחרת נוצרת מחיבור של $F(x)$ וקבוע איזשהו C.

גרף הפונקציה $F(x) + C$ מתקבל מהגרף של $F(x)$ על ידי העתקה מקבילה לאורך ציר y למרחק C:



על ידי בחירה של הקבוע C אפשר למצוא פונקציה קדומה כזו שהגרף שלה יעבור דרך נקודה נתונה.

דוגמה 4

מצאו לפונקציה $f(x) = x$ פונקציה קדומה כזו שהגרף שלה יעבור דרך הנקודה $(2, 5)$.

◀ כל פונקציות קדומות של הפונקציה $f(x) = x$ מחושבות על פי הנוסחה: $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ (בדיקה: $F'(x) = x$).

נמצא מספר C כזה, שגרף הפונקציה $y = \frac{x^2}{2} + C$ יעבור דרך הנקודה $(2,5)$;

נציב: $x = 2$, $F(2) = 5$: $5 = \frac{2^2}{2} + C$, $5 = 2 + C$, $C = 3$

תשובה: הפונקציה הקדומה היא $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$.

דוגמה 5

הוכיחו שלכל p שאינו שווה ל- (-1): $p \neq -1$ הפונקציה $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = x^p$.

◀ כיוון ש- $(x^{p+1})' = (p+1)\cdot x^p$, מתקיים: $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. **מ.ש.ל.**

דוגמה 6

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בקטע $(0, \infty)$, כאשר ידוע שערכה בנקודה $x = 1$ שווה ל- 1.

◀ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $p = -2$

לכן על פי התוצאה בדוגמה 5, כל הפונקציות הקדומות לפונקציה $f(x)$ הן מהסוג:

$$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

נציב את הנתונים ונמצא את C:

$$1 = -\frac{1}{1} + C, \quad C = 2$$

תשובה: $F(x) = -\frac{1}{x} + 2$.

דוגמה 7

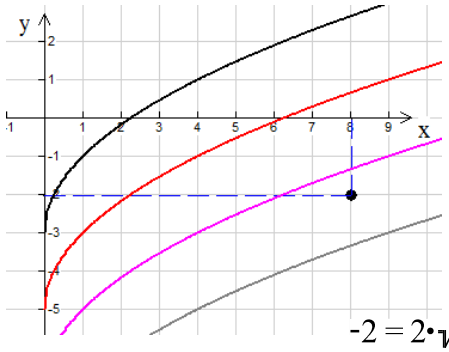
מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, כאשר ידוע שהגרף שלה עובר דרך הנקודה $(9,\ -2)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}},\quad p=-\frac{1}{2}$$

◀

על פי התוצאה בדוגמה 5, כל הפונקציות הקדומות לפונקציה $f(x)$ הן מהסוג:

$$F(x)=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$$



את הגרפים של כמה פונקציות קדומות (המתאימות לערכי C שונים) אפשר לראות בשרטוט משמאל.

שיעורי הנקודה שדרכה אמור לעבור גרף של פונקציה קדומה הם: $x=9,\ y=-2$.

נציב בביטוי הפונקציה:

$$-2=2\cdot\sqrt{9}+C=2\cdot3+C=6+C,\quad C=-8$$

תשובה: $F(x)=2\sqrt{x}-8$

פונקציות קדומות בסיסיות

מהנוסחה לפונקציה קדומה של פונקציית החזקה $f(x)=x^n$: $F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

נקבל ביטויים לפונקציות קדומות של כמה פונקציות בסיסיות:

$$n=0:\qquad f(x)=1,\ F(x)=\frac{x^1}{1}+C=x+C$$

$$n=1:\qquad f(x)=x,\ F(x)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$n=2:\qquad f(x)=x^2,\ F(x)=\frac{x^3}{3}+C$$

$$f(x) = x^n,\ F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$n = \frac{1}{2}: \quad f(x) = \sqrt{x},\ F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$n = -\frac{1}{2}: \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ F(x) = 2\sqrt{x} + C$$

תרגילים

324. הוכיחו שהפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בכל ציר המספרים:

א) $f(x) = x^5,\ F(x) = \frac{x^6}{6}$ ב) $f(x) = x^4,\ F(x) = \frac{x^5}{5}$

325. הוכיחו שהפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ עבור $0 < x$:

א) $f(x) = -\frac{2}{x^2},\ F(x) = \frac{2}{x}$ ב) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ F(x) = 1 + \sqrt{x}$

326. מצאו את כל הפונקציות הקדומות של הפונקציה:

א) x^4 ב) x^3 ג) x^{-3} ד) $x^{-\frac{1}{2}}$

327. מצאו לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה כזו שהגרף שלה עובר דרך הנקודה M:

א) $f(x) = x,\ M(-1, 3)$ ב) $f(x) = \sqrt{x},\ M(9, 10)$

328. מצאו לפונקציה $f(x)$ פונקציה קדומה $F(x)$, כאשר נתון ערכה בנקודה נתונה:

א) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$ ב) $f(x) = x^3,\ F(-1) = 2$

2.15 כללים לחישוב של פונקציות קדומות

1. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x)$, ו- $G(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $g(x)$, אזי $F \pm G$ היא פונקציה קדומה ל- $f \pm g$.

הוכחה נתון: $F' = f,\ G' = g$. על פי הכלל של נגזרת הסכום או ההפרש:

$$(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$$

2. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x)$, ו- k קבוע, אזי הפונקציה $kF(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $kf(x)$.

הוכחה נתון: $F' = f$. על פי חוקי הגזרה: $(kF)' = kF' = kf$

3. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x)$, ו- k ו- b קבועים $(k \neq 0)$,

אזי $\frac{1}{k}F(kx+b)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(kx+b)$.

הוכחה על פי כללי הגזרה של פונקציה מורכבת:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b)$$

בעזרת הכללים הנ"ל אפשר לחשב פונקציות קדומות של כל פונקציית פולינום.

דוגמה 1

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$.

פתרון

על פי כלל 1: $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$

דוגמה 2

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{(7x-3)^5}$.

פתרון

על פי כלל 3: $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $k = -3$, $b = 7$;

לכן: $F(x) = \frac{1}{-3}\cdot\frac{-1}{4(7-3x)^4} + C = \frac{1}{12(7-3x)^4} + C$

הערה

פונקציה קדומה של מכפלת שתי פונקציות **לא שווה** למכפלה של פונקציות קדומות של שתי הפונקציה!

בשפה המתמטית: אם $F' = f, G' = g$ אז $F'\cdot G' \neq f\cdot g$

פונקציה קדומה של מנת שתי פונקציות גם **לא שווה** למנה של פונקציות קדומות של כל פונקציה!

בשפה המתמטית: אם $F' = f, G' = g$ אז $\frac{F'}{G'} \neq \frac{f}{g}$.

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

329. מצאו את הפונקציה הקדומה של כל פונקציה:

א) $2x^5 - 3x^2$ ב) $5x^4 + 2x^3$ ג) $6x^2 - 4x + 3$

330. מצאו את הפונקציה הקדומה של כל פונקציה:

א) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ ב) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$ ג) $2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$

.331 מצאו את הפונקציה הקדומה של כל פונקציה:

א) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}} - \frac{3}{2x-5}$ ב) $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$ ג) $(2x+1)\sqrt{x}$

ד) $(1+2x)(x-3)$ ה) $(2x-3)(2+3x)$ ו) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$

.332 מצאו את הפונקציה הקדומה של כל פונקציה:

א) $(x+1)^4$ ב) $(x-2)^3$ ג) $-\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ ד) $-\frac{3}{\sqrt{x+3}}$

.333 לפונקציה $f(x)$ מצאו פונקציה קדומה כזו שהגרף שלה עובר דרך הנקודה M:

א) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1, 4)$ ב) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2, 15)$

ג) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3, 2)$ ד) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$, $M(1, 5)$

.334 רשמו נוסחה לפונקציה קדומה F לפונקציה f, אם ידועים שיעורי הנקודה M שדרכה עובר גרף הפונקציה F:

א) $f(x) = 2x + 1$, $M(0, 0)$ ב) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1, 4)$

ג) $f(x) = x + 2$, $M(1, 3)$ ד) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2, -1)$

.335 גרף של פונקציה קדומה F_1 לפונקציה f עובר דרך הנקודה M, והגרף של פונקציה קדומה F_2 של אותה הפונקציה f עובר דרך הנקודה N.

מה ההפרש של שתי פונקציות קדומות אלה?

איזה גרף, זה של F_1 או זה של F_2 גבוה יותר בכל אחד מהמקרים, אם נתון:

א) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $M(-1, 1)$, $N(0, 3)$

ב) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$, $M(0, 2)$, $N(1, 3)$

ג) $f(x) = 4x - x^3$, $M(2, 1)$, $N(-2, 3)$

ד) $f(x) = (2x+1)^2$, $M(-3, -1)$, $N\left(1, 6\frac{1}{3}\right)$?

2.16 תולדות חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א)

2.16.1 תולדות המושגים והסימנים

ענף המתמטיקה העוסק בנגזרות ושימושיהן בחקירת פונקציות נקרא חשבון דיפרנציאלי.

מקור השם הוא במושג של תוספות קטנות $\Delta x, \Delta y, \Delta f$ למשתנה ולפונקציה, אשר באמצעותו מבטאים את קצב שינוי הפונקציה, תכונות המשיק לגרף הפונקציה וחישוב מקורב של ביטויים אלגבריים.

המילה הלטינית התואמת ל"תוספת קטנה" היא *differentia* (באנגלית – *difference*), מכאן שם הענף "*calculus differentialis*" העוסק ב"חישוב תוספות קטנות".

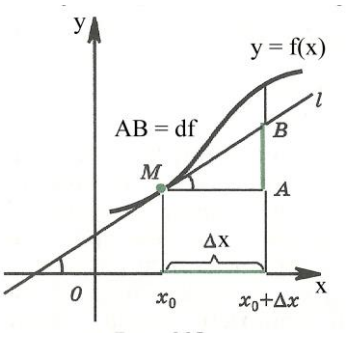
ענף זה נולד בסוף מאה XVII, אבותיו – האנגלי אייזק ניוטון והגרמני גוטפריד לייבניץ.

המושג "נגזרת" האו תרגום מילולי של מילה צרפתית *derivee*, אותו הכניס לשימוש מתמטיקאי מרפתי ז'אק לגראנז' בשנת 1798 ; הוא הציע לסמן את הנגזרת באמצעות הגרש : y', f'. שם זה משקף את משמעות המושג : הרי מקורה של $f'(x)$ הוא בפונקציה עצמה $f(x)$, כלומר, תכונותיה של $f'(x)$ נגזרות מתכונות הפונקציה.

ניוטון קרא לנגזרת של פונקציה בשם פלוּאֶנטה, כלומר, *נזלית* (מהמילים אנגליות *fluently, fluid*), המדגישות את תכונת ההשתנות של פונקציה ;

לנגזרת ניוטון קרא בשם *פלוקסיה* (משורש אנגלי *Flux* – שטף).

לייבניץ דיבר על "חשבון דיפרנציאלי", והוא רשם את הנגזרת כיחס $\frac{df}{dx}$ אשר נשאר בשימוש נרחב עד לימינו.



את הסימן df לייבניץ בחר כדי לסמן את הדיפרנציאל של פונקציה, המהווה גבול של תוספת קטנה לפונקציה Δf כאשר התוספת הקטנה Δx שואפת לאפס.

כאשר $\Delta x \neq 0$, תוספת לפונקציה שווה בקירוב ל- $\Delta f \approx f'(x_0)\cdot \Delta x$

(הקירוב כיוון שהחלפנו את קטע של עקומת הגרף בקטע של משיק).

את המשמעות הגיאומטרית של דיפרנציאל אפשר לראות מהגרף: הישר l הוא משיק לגרף הפונקציה, $df \approx \Delta f$ הוא תוספת לפונקציה.

כאשר Δx שואף לאפס, התוספת הקטנה, על פי לייבניץ, הופכת לדיפרנציאל dx, כמו גם התוספת לפונקציה Δf הופכת לדיפרנציאל dy, והביטוי המקורב הופך למדויק: $df = f'(x_0) \cdot dx$.

מכאן הגיע לייבניץ לרישום המקובל של הנגזרת

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}.$$

בניגוד לניוטון, שרשם את הנגזרת כ- $f'(x)$ (הרישום נטול כל משמעות מתמטית מלבד השייכות של f' לפונקציה f), הרישום של לייבניץ משקף את דרך חישוב הנגזרת (כיחס של תוספות קטנות של y ו- x), ואפילו עוזר בהוכחות ומשפטים על נגזרת.

לדוגמה, הכלל לחישוב הנגזרת של פונקציה מורכבת בסימנים של לייבניץ מתקבל באופן הפשוט הבא:

$$f'(g(x)) = \frac{df}{dx} = \frac{df \cdot dg}{dx \cdot dg} = \frac{df \cdot dg}{dg \cdot dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g) \cdot g'(x)$$

המושגים והסימנים החשובים נוספים בחדו"א הם מושג הגבול והמשתנה קטן אינסופית: הרי כדי לחשב את הנגזרת מציבים במקום Δx אפס (או מדויק יותר – את הערך **ששואף לאפס**) ומחשבים את הגבול של המנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

את המושג של גבול הכניס לשימוש ניוטון, והוא זה שהתחיל לרשום את הנגזרת באמצעותו:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)$$

הקיצור lim בא מהמילה הלטינית *limes* (גבול); הגדרת הנגזרת איפו, מסמנת את שאיפת התוספת של Δx לאפס, ויחד איתה, את שאיפת המנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ לערך גבולי $f'(x_0)$.

2.16.2 תולדות חשבון דיפרנציאלי

כאמור, חשבון דיפרנציאלי פיתחו ניוטון ולייבניץ יחסית לא מזמן: בסוף מאה XVII. ואולם, כמעת 2000 שנים לפניהם פתר בעיות רבות מתחום זה מתמטיקאי, פיזיקאי ומהנדס מופלא יווני ארכימדס.

הוא חקר את תכונות המשיקים לעקומות: מפרבולה עד למעגל וספירלה (מה שדורש חישוב נגזרות הפונקציות המתארות את העקומות האלה);

מצא מקסימום (נקודות קיצון) לפונקציה $f(x) = x^2(a - x)$;

חישב נפחים של חרוט וכדור (מה שהיה למעשה חישוב אינטגרלים).

אל הצורך בחישוב הנגזרת כשיפוע המשיק לעקומה הגיעו מדענים רבים שחקרו מסלולי תנועת כוכבי לכת (יוהנס קֶפְּלֶר, מאה XVI), גליליו גלילי (מאה XVI), שנחשב לאבי המכניקה הניסיונית והתיאורטית, דקארט (מאה XVI, שעל שמו קרויה מערכת צירים ישרה), שחקר את תכונות המשיקים לעקומות, שאותן רשם באמצעות שיעורי הנקודות במערכת צירים).

90. $m(-2)=-32$

91. $m(3)=m(-3)=405$

92. $y(x)=x^3$

93. א) $(-1,1)$ ב) $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ ג) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ ד) $\left(\frac{5}{3},\frac{25}{4}\right)$

94. א) $(2,8),(-2,-8)$ ב) $(3,27),(-3,-27)$ ג) $(5,125),(-5,-125)$ ד) $(0,0)$

95. א) $y'=3$ ב) $y'=-5$ ג) $y'=-3$ ד) $y'=0.3$ ה) $y'=-\frac{1}{3}$

ו) $y'=\frac{1}{2}$ ז) $y'=13$ ח) $y'=8$ ט) $y'=-1$

96. א) $y'=2x$ ב) $y'=2x$ ג) $y'=6x$ ד) $y'=-34x$ ה) $y'=-12x^2$

ו) $y'=-1.5x^2$ ז) $y'=26x$ ח) $y'=16x$ ט) $y'=-4x^3+4$

97. א) $y'=6x-5$ ב) $y'=10x+6$ ג) $y'=4x^3+4x$

ד) $y'=5x^4-6x$ ה) $y'=3x^2+5$ ו) $y'=-6x^2+18$

ז) $y'=6x^2-6x+6$ ח) $y'=-9x^2+4x-1$

98. א) $y'=7x^6-20x^4+2$ ב) $y'=8x^7-12x^3-1$

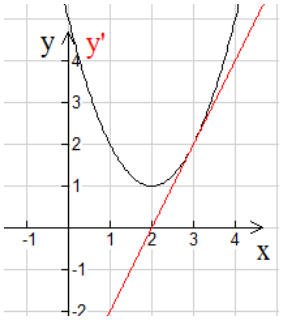
ג) $y'=x^3-x^2+x-1$ ד) $y'=1+4x+9x^2+16x^3+25x^4$

99. א) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$ ב) $f'\left(\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right)=f'\left(\frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)=0$

100. א) $x=\frac{1}{4}$ ב) $x=1,x=0$ ג) $x=-1,x=4$ ד) $x=\frac{1}{5}$

101. א) $x>\frac{2}{3}$ ב) $-1<x<0$ ג) $x<\frac{5}{2}$ ד) $x<-2$ או $x>2$

102.



103. א) $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ ב) $x=\frac{2}{3}$ ג) $x=1, x=-2$

ד) $x=1, x=-\frac{7}{3}$ ה) $x=0, x=-1, x=2$ ו) $x=0, x=1, x=-4$

104. א) $f'(x)=2x+3x^2$ ב) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+5$

ג) $f'(x)=2x+3$ ד) $f'(x)=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

105. א) $f'(x)=12x^2+8x^3-5x^4$ ב) $f'(x)=\sqrt{x}(5x-1.5)$

ג) $f'(x)=9x^2+5x^4$ ד) $f'(x)=2+9x^2-8x^3$

106. א) $f'(x)=\frac{11}{(5x-3)^2}$ ב) $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

ג) $f'(x)=\frac{34}{(5x+8)^2}$ ד) $f'(x)=\frac{2(2x-3)}{x^3}$

107. א) $f'(x)=8x^7-12x^3-1$ ב) $f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{8}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ג) $f'(x)=7x^6-20x^4+2$ ד) $f'(x)=x-\frac{102}{x^4}$

108. א) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-4,\ f'(2)=1$ ב) $f'(0.01)=-19,\ f'(4)=0$

ג) $f'\left(\sqrt{2}\right)=1\frac{1}{2},\ f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=4$ ד) $f'(-3)=-5,\ f'(0)=-\frac{5}{4}$

109. א) $x>1.5$ ב) $-1<x<0$ ג) $x<2.5$ ד) $-2<x<2$

110. א) $f'(x)=\frac{-8x^7+48x^5+3x^2-3}{(1+4x^5)^2}$ ב) $f'(x)=4x-\frac{5x\sqrt{x}}{2}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\frac{6}{x^2}$

ג) $f'(x)=\frac{6x^8-12x^5+15x^2}{(1-x^3)^2}$ ד) $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}(11x^4-1)$

111. א) $x_{1,2}=\pm 1$ ב) $x_1=0\,,x_{2,3}=\pm 1$ ג) $x=-1$ ד) $x_1=0\,,x_{2,3}=\pm\sqrt{6}$

112. א) $-3<x<7$ ב) $\frac{1}{3}<x<3$ ג) $-2<x<2$ ד) לכל x

113. א) $y=x^2+3x+C$ ב) $y=4x^4-0.4x+C$

ג) $y=4x^2-2x+C$ ד) $y=3x^3-\frac{1}{2}x+C$

114. א) $f'(x)=16(2x-7)^7$ ב) $f'(x)=-\frac{10}{(5x+1)^3}$

ג) $f'(x)=36(9x+5)^3$ ד) $f'(x)=-\frac{30}{(6x-1)^6}$

115. א) $f'(x)=\frac{9}{2}\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-10}$ ב) $f'(x)=2\left(\frac{1}{4}x-7\right)^7+8(1-2x)^3$

ג) $f'(x)=-15(4-1.5x)^9$ ד) $f'(x)=65(5x-2)^{12}+24(4x+7)^{-7}$

116. א) $f'(x)=17(x^3-2x+3)^{16}\cdot(3x^2-4x)$ ב) $f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5}}$

ג) $f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$ ד) $f'(x)=-15x^2(3-x^3)^4+\frac{1}{\sqrt{2x-7}}$

117. א) $f(x)=\frac{x}{2}$ ב) $f(x)=\frac{(x-2)}{3}$ ג) $f(x)=-\sqrt{x-1}$ ד) $f(x)=x^2$

118. א) $f'(1)=0$ ב) $f'(1)=416$ ג) $f'(1)=-16.5$ ד) $f'(1)=31.5$

119. כן

120. $x_1=3\,,\ x_2=-\frac{2}{5}\ ,\ x_3=\frac{16}{11}$

121. א) $f'(x)=4x^3-3x^2+4x-2+\frac{3}{(x+1)^2}=\frac{4x^5+5x^4+2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$;

ב) $f'(x)=2x+1-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}-\frac{3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-\frac{\sqrt{x}}{2}-1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2}$

122. א) $-\sqrt{2}<x<0$ או $x>\sqrt{2}$ ב) $-1<x<0$ או $x>2$
ג) $x>0$ ד) $x>1$

123. א) $\frac{19}{21}<x<\frac{5}{3}$ ב) אף x ג) כל x ד) $x>\frac{1}{2}$

124. $f'(x)=\frac{2x-5}{\sqrt{(x-2)(x-3)}}$

129. א) עלייה: $x>\frac{1}{2}$, ירידה: $x<\frac{1}{2}$ ב) עלייה: $x>\frac{3}{10}$, ירידה: $x<\frac{3}{10}$
ג) עלייה: $x>-1$, ירידה: $x<-1$ ד) עלייה: $x>-6$, ירידה: $x<-6$
ה) עלייה: $x>1$ או $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$
ו) עלייה: $x>3$ או $x<-2$, ירידה: $-2<x<3$
ז) עלייה: $x>4$ או $x<0$, ירידה: $0<x<4$
ח) עלייה: $x>3$ או $x<-2$, ירידה: $-2<x<3$

130. א) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x<-2$ או $x>-2$
ב) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x<0$ או $x>0$
ג) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x>3$ ד) עלייה: $x>5$, ירידה: *קיא* x

131. א) עלייה: כל x , ירידה: *קיא* x ב) עלייה: $0<x<\frac{16}{5}$, ירידה: $x<0$ או $x>\frac{16}{5}$
ג) עלייה: $\frac{13}{3}<x<5$, ירידה: $x<\frac{13}{3}$ ד) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x>5$

132. א) עלייה: $\frac{27-\sqrt{474}}{15}<x<\frac{27+\sqrt{474}}{15}$, בקירוב: $0.35<x<3.25$
ירידה: $3.25<x<4$ או $x<\frac{27-\sqrt{474}}{15}$, בקירוב: $x<0.35$ או $\frac{27+\sqrt{474}}{15}<x<4$
ב) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x>5$ ג) עלייה: *קיא* x , ירידה: $x<\frac{1}{2}$
ד) עלייה: $x>\frac{1}{3}$, ירידה: $x<\frac{1}{3}$

133. א) מינימום $\left(\frac{1}{7},3\frac{6}{7}\right)$ ב) מקסימום $\left(2\ ,\ 5\frac{1}{3}\right)$, מינימום $\left(-2\ ,\ -5\frac{1}{3}\right)$
ג) מינימום $(2,\ 6)$ ד) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},8-\frac{16}{3\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},8+\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$

134. א) $(3,-41)$, $(-2,84)$ ב) $(0,9)$, $(4,-23)$

135. א) מינימום (-2,-11), מקסימום (2,28) ב) $\max(2,25)$, $\min(0,9)$, $\max(-2,25)$

ג) $\min(0,-4)$, $\max(-1,-3)$ ד) מינימום (-5,-2), מקסימום (5,2)

137. א) $\min\left(-\frac{7}{6},-9.93\right)$ ב) $\max(-1,\sqrt{2})$ ג) $\max(0,\sqrt{2})$ ד) $\min(3.5,-7.35)$

138. א) $\max(1.58,6.25)$, $\min(-0.38,-2.05)$ ב) $\max\left(\frac{11}{6},5.04\right)$

282. א) $m > 0$ ב) $m < 0$

ג) $m > -6$ ד) $m > -4$

ה) $m > 0$, $-n$ כלשהו ו) $m < 0$, $-n$ כלשהו ז) $m < -4$, $-n$ כלשהו

ח) $m = 12$

282.ט א) m ב) $f_{min} = n - 2m^2$ ג) $n \geq 2m^2$

282.י א) $m \leq 6$ ב) $m \geq 7.5$

282.יא א) $m \leq 0$ ב) $0 < m \leq 2$ ג) $m \geq 2$

139. א) $\max(2,-4)$, $\min(0,0)$ ב) $\max(0,3)$, $\min(2,-13)$, $\min(-2,-13)$

ג) $\max(-1,4.5)$, $\min(2,-9)$

140. א) קטע $[1,3]$: מקסימלי 3, מינימלי 1 , קטע $[-1,1]$: מקסימלי 1, מינימלי -15

ב) קטע $[-1,1]$: מקסימלי -9, מינימלי -16 , קטע $[0,3]$: מקסימלי 0, מינימלי -25

ג) קטע $[0,2]$: מקסימלי 56, מינימלי -2 , קטע $[2,3]$: מקסימלי 594, מינימלי 56

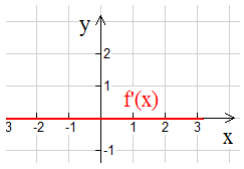
ד) קטע $[-4,0]$: מקסימלי 5, מינימלי 3 , קטע $[0,2]$: מקסימלי 11, מינימלי 5

141. א) שווים ב) ערך מינימלי בקטע B

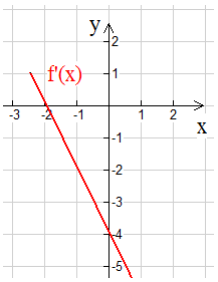
142. $x = -2$

143. א) 8 ב) -3 ג) לא x ד) לא x

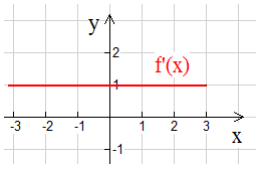
287.א א)



ב)

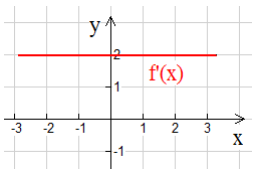


ג)

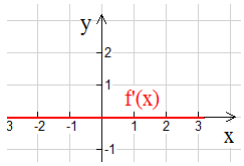


ב.287

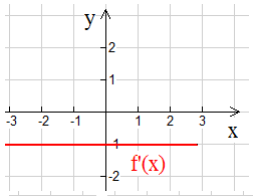
ד)



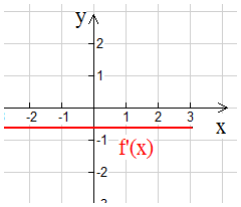
ה)



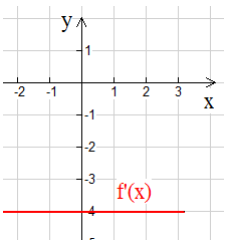
ו)



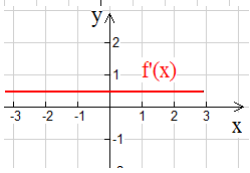
ז)



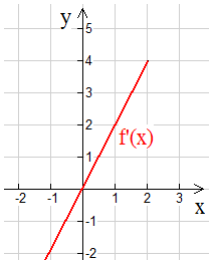
ח)



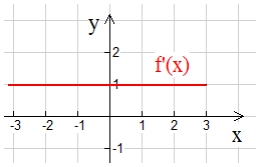
ט)



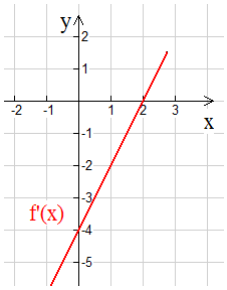
א)



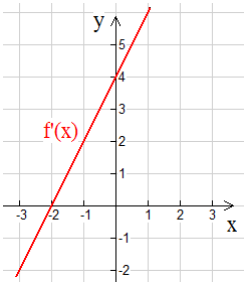
ב)



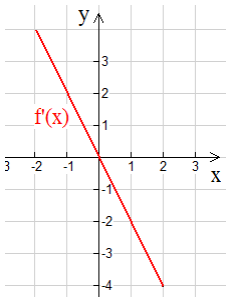
ג)



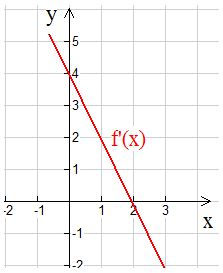
ד)



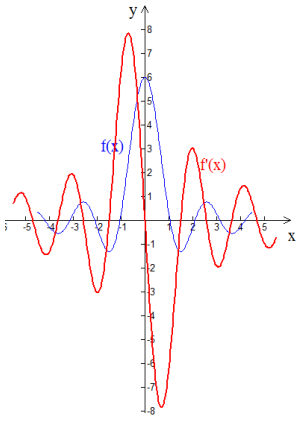
ה)



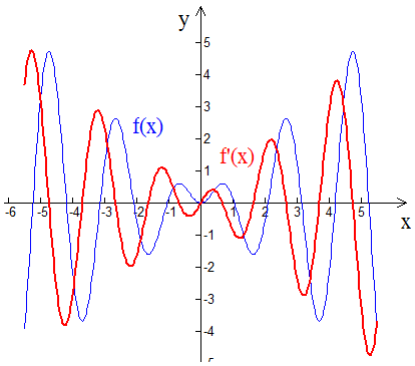
ו)



ד)

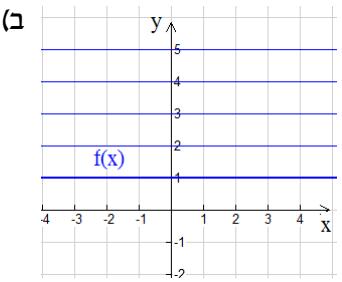


ה)

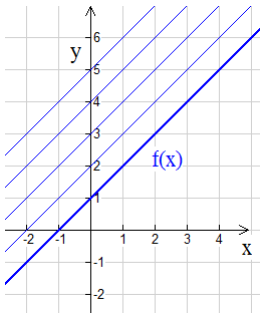


ד.287

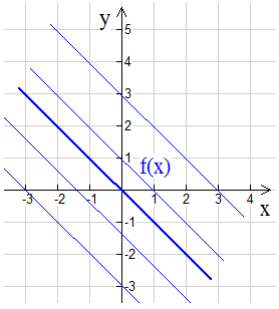
א)



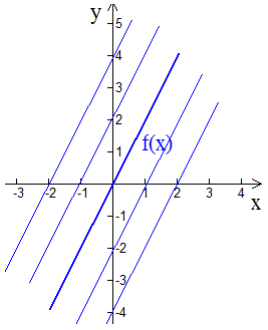
ב)



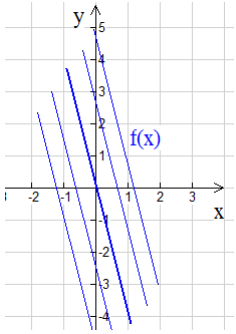
ג)



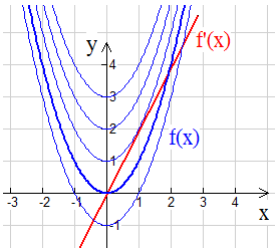
ד)



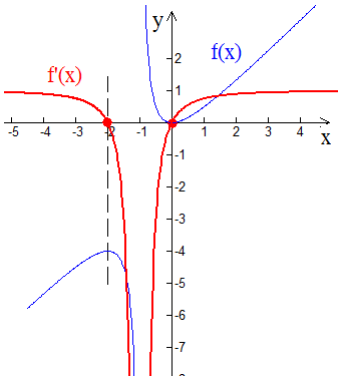
ה)



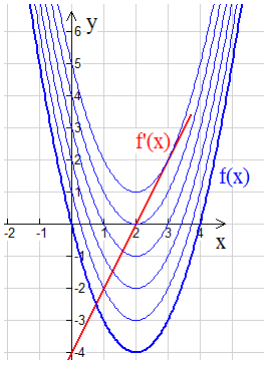
ו)



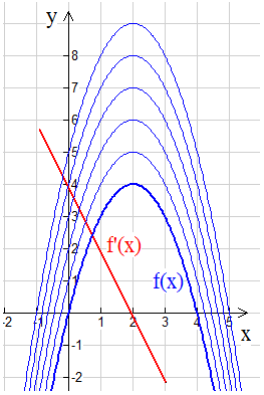
ז)



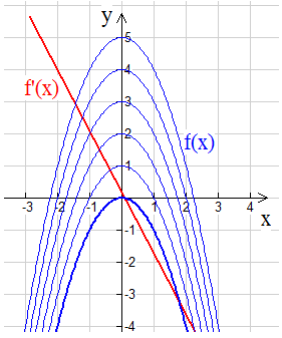
ח)



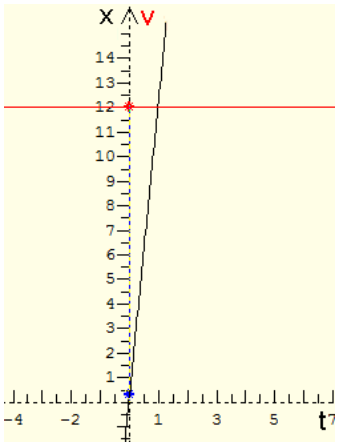
ט)



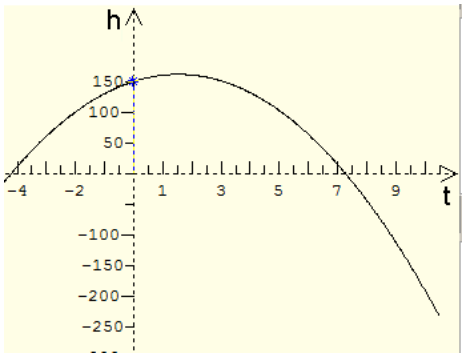
י)



144. 8 , 16
145. 18 , 18
146. 0 , 20
147. 18 , 18
148. 45 , 60 , 30
149. 12 , 12
150. 8 , 8
151. 30 , 20
152. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, 10
153. 92 ס"מ
154. 7 , 11
155. 21 , 14
156. 1.5 , 3 , 3
157. 20, 15
159. R=0.756 , H=0.756
160. BK=22
161. 169 סמ"ר
162. 149.26 ס"מ
163. $0.015p^3$
164. 4R
165. 20,000
166. א) אין הגבלה ב)120
167. 71
168. א. 12 קמ"ש ב. 300 מ' = 0.3 ק"מ ג. 15.3 ק"מ ד.



169. א.



ב. זמן העלייה : $1\frac{24}{49}$ שניות , זמן המעוף : $\frac{15+\sqrt{3165}}{9.8} \approx 7.27$ שניות ,

הגובה המקסימלי : $161\frac{47}{98}$ מ' ;

ג. מהירות הכדור :
$$V(t)=\begin{cases}15-9.8t\ ,\ 0\le t\le 1\frac{24}{49}\\ 9.8t-15\ ,\ 1\frac{24}{49}\le t\le \frac{15+\sqrt{3165}}{9.8}\end{cases}$$

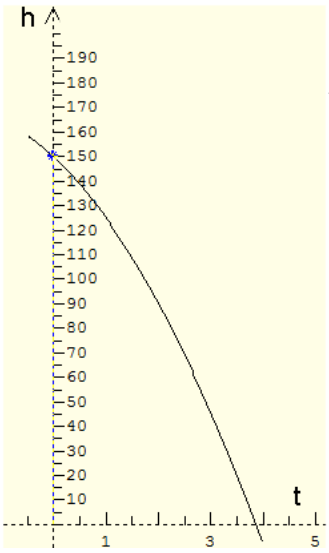
ה. 3.8 מ' לשנייה

170. א. מהירות האבן: $v(t) = -10t - 20$

הערה: סימן המהירות מסמן את כיוון הנפילה; המשמעות של מהירות שלילית היא תנועה מטה. גודל המהירות הוא הערך המוחלט: $|v(t)|$.

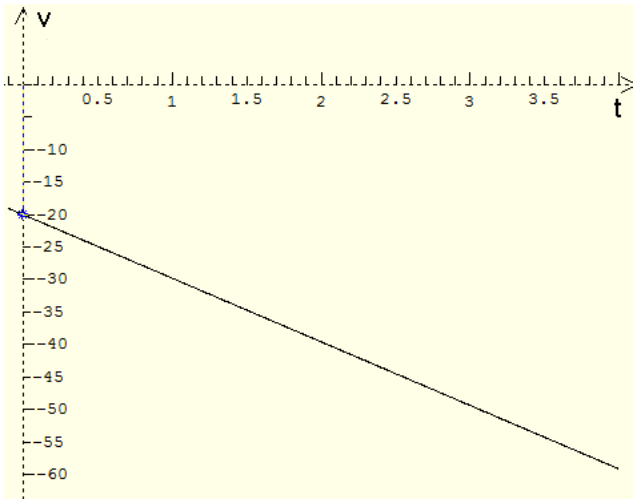
ב. $v(2) = -40$ m/sec ; ג. $h(2) = 90$ m;

ד.



ה. זמן הנפילה: $t = \sqrt{34}-2 \approx 3.83$ sec

ו.



ז. $v \approx -58$ m/sec

171. $x_{min} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$

172. א) $m=1\ ,\ n=-5$ ב) $m=1\ ,\ n=5$

ג) $m=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ n=3-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ד) $m=\sqrt{3}\ \ n=-3+2\sqrt{3}$

173. א) 3 ב) 1 ג) -4 ד) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ה) 3 ו) 10

174. א) $y=3x$ ב) $y=-11x+12$ ג) $y=1$, $y=3x-1$

ד) $y=\frac{1}{2}x+1$ ה) $y=-\frac{1}{6}x+1\frac{5}{6}$ ו) $y=-\frac{1}{6}x+1\frac{5}{6}$

175. א) $y=0$ ב) $y=0$ ג) $y=2x+3$ ד) $y=2x$

176. א) $\left(\frac{5}{3},2\right)$ ב) אין נקודה כזו ג) $(0,1)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{27}\right)$ ד) $(3,0)$

177. פונקציה f(x): נק' השקה (1,-1) , משוואת המשיק: $y=2x-3$

פונקציה g(x): נק' השקה (1,0) , משוואת המשיק: $y=2x-2$

178. $y=2x+6$

179. $S_{\Delta AOB}=\frac{8}{3}$

326. א) $\frac{x^5}{5}+C$ ב) $\frac{x^4}{4}+C$ ג) $-\frac{1}{2x^2}+C$ ד) $2\sqrt{x}+C$

327. א) $F(x)=\frac{x^2}{2}+2.5$ ב) $F(x)=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-8$

328. א) $F(x)=-\frac{1}{x}-10$ ב) $F(x)=\frac{x^4}{4}+1.75$

329. א) $\frac{x^6}{3}-x^3+C$ ב) $x^5+\frac{x^4}{2}+C$ ג) $2x^3-2x^2+3x+C$

330. א) $2\ln x-\frac{3}{x}+C$ ב) $-\frac{1}{x^2}-3\ln x+C$ ג) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$

331. א) $\frac{8\sqrt{3x+1}}{3}-\frac{3\ln(2x-5)}{2}+C$ ב) $\frac{2x^5}{15}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^2}{6}+C$

ג) $\frac{3x^4}{10}-\frac{3x^2}{10}+\frac{2x}{5}+C$ ד) $\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-3x+C$

ה) $2x^3-\frac{5x^2}{2}-6x+C$ ו) $2x\sqrt{x}\left(\frac{2x}{5}+\frac{1}{3}\right)+C$

.332 א) $\frac{(x+1)^5}{5}+C$ ב) $\frac{(x-2)^4}{4}+C$

ג) $\frac{4(x-2)\sqrt{x-2}}{3}+C$ ד) $2(x+3)\sqrt{x+3}+C$

.333 א) $F(x)=2x^2-\frac{1}{x}+1$ ב) $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x+7$

ג) $F(x)=-x^2+x+8$ ד) $F(x)=-\frac{1}{2x^2}-2x^5+3x+4.5$

.334 א) $F(x)=x^2+x$ ב) $F(x)=x^3-x^2+4$

ג) $F(x)=0.5x^2+2x+0.5$ ד) $F(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$

.335 א) הפרש 4 , F_1 גבוהה יותר ב) הפרש 0, $F_1=F_2$

ג) הפרש 2 , F_2 גבוהה יותר ד) הפרש 18 , F_1 גבוהה יותר