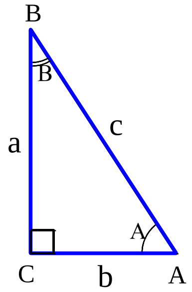
3. יסודות הטריגונומטריה

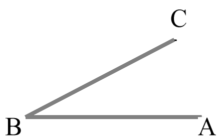
3.1 סינוס, קוסינוס וטנגנס של זווית חדה במשולש ישר זווית

משמעות המילה טריגונומטריה ביוונית היא **מדידת משולשים** (Trigon – משולש, Metria – מדידה). בפרק זה נתמקד בטריגונומטריה של משולשים ישרי זווית.



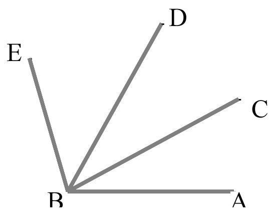
נתבונן במשולש ישר הזווית ABC, שבו הזווית $\angle C$ היא זווית ישרה: $\angle ACB = 90°$. כיוון שסכום שלוש זוויות במשולש הוא $180°$, נסיק שסכום שתי הזוויות הנותרות הוא $\angle A + \angle B = 90°$, כלומר $\angle A$ ו- $\angle B$ הן זווית חדות.

תזכורת במשולש ישר זווית, הצלעות היוצרות זווית ישרה נקראות **ניצבים**, והצלע ממול נקראת **יתר**. הניצב AC, היוצר זווית חדה $\angle A$, נקרא **הניצב שְׁלְיַד** הזווית $\angle A$, והניצב BC נקרא **הניצב שְׁמוּל** הזווית $\angle A$.

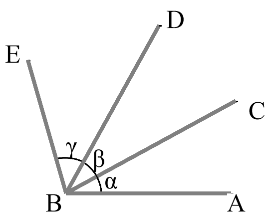


הערה אפשר לסמן זווית בשלוש דרכים:

א) בשלוש אותיות, על פי הקרניים שיוצרות אותה,
כאשר האות השנייה מסמנת את קדקוד הזווית: $\angle A\mathbf{B}C$.
סימון זה אמנם ארוך, אך מדויק וחד משמעי.

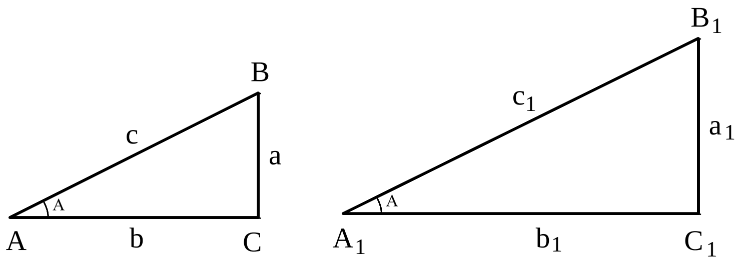


ב) באות אחת המציינת את הקדקוד: $\angle B$.סימון זה נוח עבור זווית בודדת, אולם כאשר מספר קרניים נפגשות בקדקוד אחד, לא ברור איזו זווית האות הזו מציינת.



ג) באותיות יווניות המציינות את הקשת בין שוקי הזווית (α, β, γ...).

נתבונן בשני משולשים ישרי הזווית ABC ו- $A_1B_1C_1$ בעלי זוויות חדות שוות: $\angle A = \angle A_1$:



כיוון שהמשולשים ישרי זווית, שוות גם הזוויות $\angle B$ ו- $\angle B_1$:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - \angle A_1 = \angle B_1$$

על פי משפט דמיון ראשון (**ז.ז.**), המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle A_1B_1C_1$ דומים :

$\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. במשולשים דומים שווים יחסי הצלעות המתאימות :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

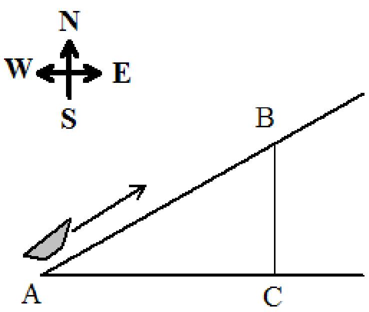
פרופורציה ארוכה זו שקולה לשלוש הפרופורציות:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \; \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}, \; \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$$

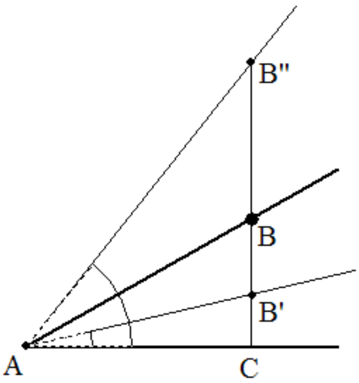
כלומר, היחסים $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ ו- $\frac{b}{c}$ אינם תלויים בגודל המשולש, אלא בגודל הזווית A.
יחסים אלה נקראים <u>יחסים טריגונומטריים</u>, והם מתארים מצבים רבים הן בהנדסה והן בחיי היום-יום.

הגדרת הסינוס

נדמיין אנייה שטה לאורך קו החוף מזרחה, ועקב רוח צד היא נסחפת צפונה. באנייה מכשירי ניווט המאפשרים למדוד את כיוון השיוט (זווית בין קו החוף לבין מסלול האנייה) ואת המרחק AB שהיא שטה מנקודת ההפלגה A.

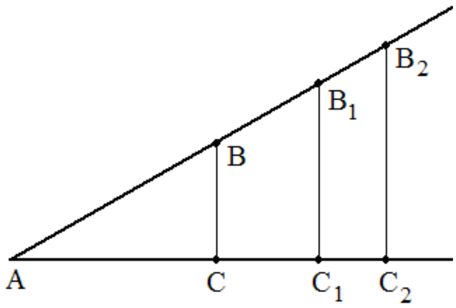


כיצד נדע, על פי כיוון השיוט והמרחק AB, את מרחק האנייה מהחוף BC?



מרחק זה תלוי בכיוון השיוט: אם הזווית $\angle CAB'$ קטנה מהזווית $\angle CAB$, גם המרחק $B'C$ קטן מ- BC, ואם הזווית תהיה גדולה יותר $(\angle CAB'' > \angle CAB)$, גם המרחק $B''C$ יהיה גדול מ- BC.

נניח שאדם הנמצא על החוף בנקודה C, מודד את המרחק BC ומעביר את המידע הזה לשייטים שעל האנייה. האם מידע זה יאפשר להם לחשב את המרחק מהחוף גם בהמשך ההפלגה, כלומר בנקודות B_1, B_2, ...?



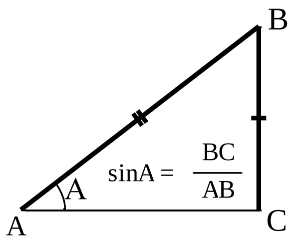
המשולשים ABC, AB_1C_1 ו- AB_2C_2 ישרי זווית ובעלי זווית חדה משותפת $\angle CAB$, לכן הם **דומים** (על פי שלוש הזוויות). לפי התכונה של משולשים דומים, גם יחסי הצלעות המתאימות שווים:

$$\frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB}$$

כלומר, יחס הניצב שמול הזווית ליתר נשאר קבוע. יחס זה מכונה **סינוס הזווית**.

הגדרה במשולש ישר זווית **היחס בין הניצב שמול הזווית החדה ליתר נקרא סינוס הזווית:**

$$\sin \measuredangle A = \frac{BC}{AB} \qquad (1)$$



כיוון שבמשולש ישר זווית הניצב תמיד קטן מהיתר,

מקבלים לפי נוסחה (1): $\sin \measuredangle A < 1$

כלומר: **ערכו של סינוס זווית כלשהי במשולש קטן מ- 1.**

אם גודל הזווית ידוע, אפשר לחשב את הסינוס באמצעות מחשבון.

לדוגמה: $\sin 30° = 0.5$, $\sin 45° = 0.71$, $\sin 53° = 0.8$.

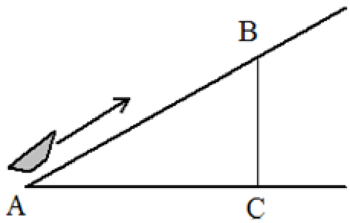
שימו לב! הערך המתקבל במחשבון, למעט בזוויות מסוימות, אינו מדויק, **ובכלל בדרך כלל** (למעט מקרים בודדים) **אי אפשר לחשב את ערכי הסינוס במדויק!**

כדי לפתור בעיות מעשיות די בדיוק עד למאית (ספרה שנייה אחרי הנקודה העשרונית), לכן נעגל עד למאית את המספרים המתקבלים במחשבון. רק במקרים מיוחדים משתמשים בדיוק גבוה יותר.

בהמשך נלמד כיצד לבטא סינוסים של זוויות מיוחדות באמצעות שורש ריבועי.

באמצעות נוסחה (1) אפשר למצוא אחד משלושת הערכים: זווית, ניצב ממול ויתר, אם השניים האחרים ידועים.

דוגמה 1 (מציאת הניצב מול הזווית).



ספינה שטה בזווית של $30°$ לקו החוף.

מה מרחק הספינה מהחוף, אם היא כבר שטה מרחק של 800 מ'?

◄ על פי השרטוט והנוסחה (1): $\sin \measuredangle A = \frac{BC}{AB}$

מרחק הספינה מהחוף הוא BC;

נחלץ אותו מהנוסחה: $BC = AB \cdot \sin \measuredangle A$.

נציב נתונים: $BC = 800 \cdot \sin 30° = 800 \cdot 0.5 = 400$ מ' ▷

דוגמה 2 (מציאת היתר) ספינה שטה בזווית של $30°$ לקו החוף.

מה הדרך שעברה עד שהתרחקה מהחוף ב- 300 מ'?

◄ נרשום את הנתונים לפי השרטוט: $\angle A = 30°$, $BC = 300$. $AB = ?$

מהנוסחה (1) נחלץ את AB:

$$AB = \frac{BC}{\sin \measuredangle A} = \frac{300}{0.5} = 600 \text{ מ'}$$ ▷

דוגמה 3 (מציאת הזווית)

ספינה שטה בזווית לקו החוף. בנקודה B מדדו את הדרך שהיא עברה:

$AB = 1200$ מ', ומרחקה מהחוף: $BC = 720$ מ'.

באיזו זווית לקו החוף שטה הספינה?

◄ תחילה נמצא את סינוס הזווית:

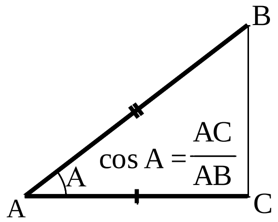
$$\sin \measuredangle A = \frac{BC}{AB} = \frac{720}{1200} = 0.6$$

כדי למצוא את הזווית עצמה נשתמש במחשבון (ברוב המחשבונים פעולה זאת מסומנת כ- $\sin^{-1}$).

תשובה: $\measuredangle A = 37°$ ▷

הגדרת הקוסינוס

בדומה להגדרת סינוס הזווית, אפשר להגדיר שני יחסים טריגונומטריים נוספים במשולש ישר זווית:



הגדרה במשולש ישר זווית, **היחס בין הניצב שליד הזווית החדה ליתר** נקרא **קוסינוס הזווית**.

$$\cos \measuredangle A = \frac{AC}{AB} \qquad (2)$$

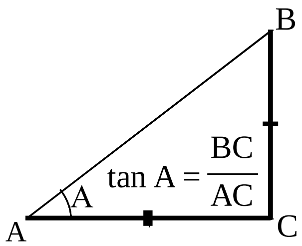
כיוון שבמשולש ישר זווית הניצב תמיד קטן מהיתר, מקבלים מנוסחה (2):

$$\cos \measuredangle A < 1$$

כלומר, **ערכו של קוסינוס זווית** במשולש **קטן מ- 1**.

לדוגמה: $\cos 30° = 0.87$, $\cos 45° = 0.71$, $\cos 60° = 0.5$.

הגדרת הטנגנס



במשולש ישר זווית, **היחס בין הניצב מול הזווית החדה לניצב שליד הזווית** נקרא **טנגנס הזווית.**

$$\tan \measuredangle A = \frac{BC}{AC} \qquad (3)$$

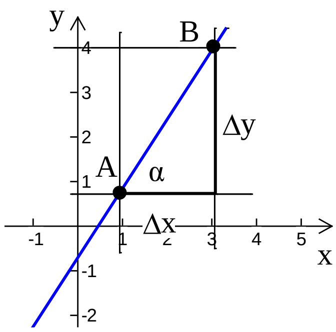
כיוון שבמשולש ישר זווית יחס הניצבים יכול להיות מספר כלשהו ($BC > < = AC$), גם ערכי הטנגנס יכולים להיות מספרים כלשהם (להבדיל מערכי סינוס וקוסינוס, שלא יכולים להיות גדולים מ- 1).

דוגמה $\tan 5° = 0.09$, $\tan 25° = 0.47$, $\tan 50° = 1.19$, $\tan 85° = 11.43$.

טנגנס כשיפוע הישר

למדנו שאפשר לחשב שיפוע של ישר כיחס: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

כאשר Δy הוא הפרש שיעורי y ו- Δx הוא הפרש שיעורי x של שתי נקודות A ו- B שדרכן עובר הישר.



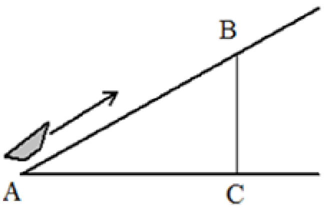
בגרף רואים, שקטע AB ושני הקטעים Δx ו- Δy יוצרים משולש ישר זווית, והיחס $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ שווה לטנגנס זווית השיפוע: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$.

שימו לב:

כדי שגודל הזווית יתאים לשרטוט, קנה המידה של שני הצירים חייב להיות זהה!

בעזרת נוסחאות (2) ו- (3) אפשר לחשב את הניצבים, את היתר ואת הזוויות במשולש ישר זווית, אם ידועים שניים מהם.

דוגמה 4 (מציאת הניצב שליד הזווית על פי הזווית והיתר)



סירה שטה בזווית של $37°$ לקו החוף. באיזה מרחק מהנמל (נק' A) תהיה נקודה על החוף (נק' C) שהיא הקרובה ביותר לסירה, אם ידוע שהסירה שטה מרחק של 500 מ'?

◀ יש למצוא את AC, שהוא הניצב שליד הזווית A במשולש ישר הזווית ABC, כאשר ידוע היתר AB.

הנוסחה המתאימה ביותר פה היא נוסחה (2) של קוסינוס: $AC = AB\cdot\cos A$

◀ מציבים נתונים ומקבלים את התשובה:

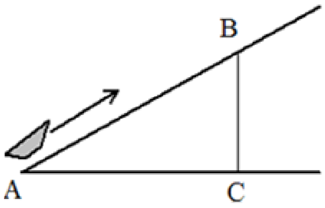
$$\triangleright\ AC = 500\cdot\cos 37° = 500\cdot 0.8 = 400 \text{ (מ')}$$

שימו לב: כאשר זווית מסומנת באות אחת (כמו $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle\alpha, \sphericalangle\beta, \ldots$), מקובל להשמיט את סימן הזווית ברישום פונקציות טריגונומטריות, ובמקום לדוגמה, $\sin\sphericalangle A, \cos\sphericalangle B, \tan\sphericalangle\alpha$ לרשום פשוט: $\sin A, \cos B, \tan\alpha$.

דוגמה 5 (מציאת הניצב על פי הזווית ממול ועל פי הניצב שליד)

סירה שטה בזווית של $30°$ לקו החוף.

באיזה מרחק מהחוף תהיה הסירה מול הנקודה C המרוחקת מהנמל (נק' A) 1500 מ'?



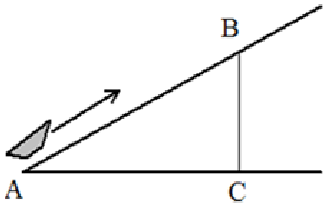
◄ יש למצוא את הקטע BC, שהוא הניצב מול הזווית A במשולש ישר הזווית ABC, כאשר הזווית והניצב השני AC ידועים.

הנוסחה המתאימה ביותר במקרה זה היא הנוסחה (3) של טנגנס. ממנה מקבלים: $BC = AC \cdot \tan A$

מציבים נתונים ומקבלים את התשובה:

▷ $BC = 1500 \cdot \tan 30° = 1500 \cdot 0.58 = 870$ מ'

דוגמה 6 (מציאת הניצב על פי הזווית והניצב מולה)



סירה שטה בזווית של $30°$ לקו החוף.

באיזה מרחק מהנמל נמצאת על החוף הנקודה הקרובה ביותר לסירה, אם ידוע שהמרחק בינה לבין הסירה הוא 1,000 מ'?

◄ ידוע שהמרחק הקטן ביותר בין נקודה וישר הוא אורך האנך מהנקודה לישר.

מכאן מסיקים שהמשולש $\triangle ABC$ ישר זווית.

במשולש זה נתון: $\angle A = 30°$, $BC = 1000$. צ"ל: AC.

כיוון שנתונים ניצב וזווית ויש למצוא את הניצב השני, נשתמש בנוסחת הטנגנס:

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

ונחלץ ממנה את – AC: $AC = \frac{BC}{\tan A} = \frac{1000}{\tan 30°} = \frac{1000}{0.58} = 1724.1$ מ'

תשובה $AC = 1724.1$ מ' ▷

הקשר בין סינוס, קוסינוס וטנגנס

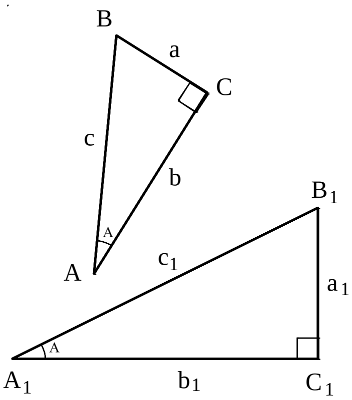
נחלק (1) ב- (2), ונקבל:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \tan A$$

כלומר, **טנגנס הזווית שווה ליחס של סינוס לקוסינוס הזווית:**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad (4)$$

משפט **ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס של זווית תלויים בגודל הזווית בלבד, ולא תלויים בגודל המשולש ובמיקומו.**



ההוכחה לכך נובעת משוויון יחסי הצלעות של שני משולשים ישרי זווית דומים, כפי שהוכחנו בתחילת הפרק:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1},\ \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$$

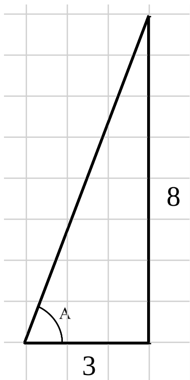
כיוון שעל פי ההגדרות מתקיים:

$$\frac{a}{b}=\tan A,\ \frac{a}{c}=\sin A,\ \frac{b}{c}=\cos A,$$

מסיקים כי היחסים הטריגונומטריים של זווית חדה במשולש ישר זווית אינם תלויים בגודל המשולש ומיקומו.

בהמשך נראה שאפשר להגדיר סינוס, קוסינוס וטנגנס גם לזוויות שאינן קשורות למשולש ישר זווית: זווית קהה, זווית שטוחה ואפילו אפס!

בניית הזווית על פי גודל הטנגנס



כיוון שערך הטנגנס של זווית חדה אינו תלוי בגודל המשולש ומיקומו, אפשר לשרטט משולש ישר זווית, שבו יחס הניצבים שווה לערכו הנתון של הטנגנס.

לדוגמה, אם $\tan A=\frac{8}{3}$, נקצה על שוק אחת של זווית ישרה קטע באורך 8, על שוק שנייה קטע באורך 3, ונשלים את המשולש.

הזווית שמול הקטע הראשון היא הזווית הנדרשת.

הערה: אם ערך של טנגנס נתון כמספר עשרוני, לדוגמה, $\tan A=0.2$, אפשר להמיר אותו לשבר פשוט ($0.2=\frac{2}{10}$), או אפשר להקצות על ניצב אחד קטע באורך 1, ועל השני קטע באורך שווה לערך של טנגנס (חִשבו, מדוע?).

תרגילים

.74 מְצאו בעזרת המחשבון :

א) $\sin 22°$ ב) $\cos 68°$ ג) $\sin 74°$

ד) $\cos 22°$ ה) $\tan 10°$ ו) $\tan 70°$

.75 מְצאו בעזרת המחשבון את ערך הזווית x, אם ידוע כי :

א) $\sin x = 0.3827$ ב) $\sin x = 0.9048$

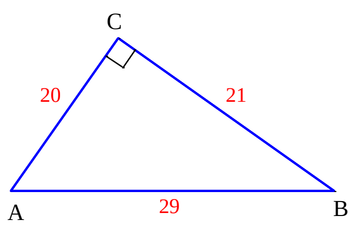
ג) $\cos x = 0.8526$ ד) $\cos x = 0.5225$

ה) $\tan x = 0.4706$ ו) $\tan x = 4.1653$

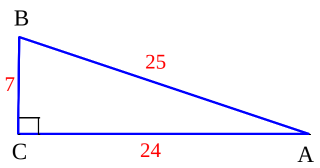
.76 מצאו את ערך הביטוי :

א) $2\cos 60° + \sqrt{3}\cos 30°$ ב) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 4\tan 45°$

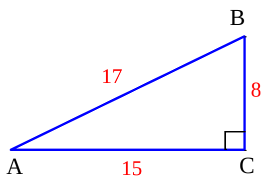
.77 על פי הנתונים, רשמו ביטויים ל- $\sin A$, $\cos A$ ו- $\tan A$ כשברים פשוטים :



א)

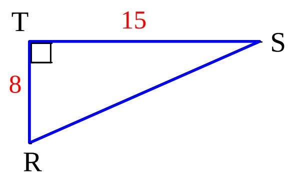


ב)

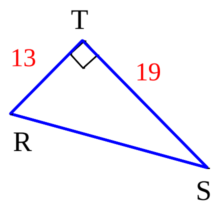


ג)

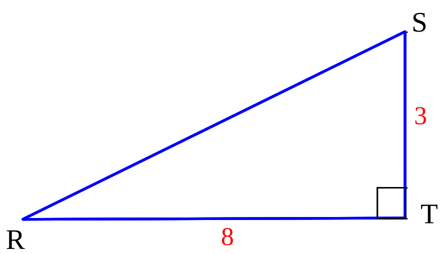
.78 על פי הנתונים, רשמו ביטויים ל - $\tan \angle R$ כשברים פשוטים :



א)



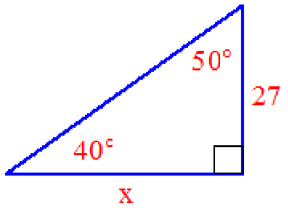
ב)



ג)

.79 על פי נתוני התרגיל הקודם, רשמו ביטויים ל - $\tan \angle S$ כשברים פשוטים.

.80 ישנן שתי דרכים למצוא את גודל x בשרטוט:



א. להשתמש ב- $\tan 40°$:

$$\tan 40° = \frac{27}{x}$$

$$0.84 \approx \frac{27}{x}$$

ב. להשתמש ב- $\tan 50°$:

$$\tan 50° = \frac{x}{27}$$

$$1.19 \approx \frac{x}{27}$$

א) איזה מהביטויים הבאים נכון:

(a $x \approx 27 \cdot 0.84$ (b $x \approx \frac{27}{0.84}$ (c $x \approx 27 \cdot 1.19$ (d $x \approx \frac{27}{1.19}$

.81 שרטטו את זווית α, אם נתון:

א) $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ב) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

ג) $\cos \alpha = 0.2$ ד) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

ה) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ו) $\sin \alpha = 0.4$

הדרכה נסו את שתי הדרכים:

א. מצאו את גודל הזווית בעזרת מחשבון ושרטטו אותה באמצעות מד זווית;

ב. היעזרו בנייר משבצות ושרטטו משולש שבו אורכי הצלעות יתאימו ליחסים הנדרשים. אם ערך הטנגנס אינו ידוע, מצאו תחילה זווית, ולאחר מכן חשבו את ערך הטנגנס.

.82 מִצאו סינוס, קוסינוס וטנגנס של הזוויות A ו- B במשולש ישר זווית ABC, שבו C היא זווית ישרה, אם נתון:

א) $AB = 17, BC = 8$ ב) $AC = 20, BC = 21$

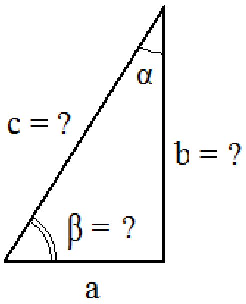
ג) $AC = 2, BC = 1$ ד) $AB = 25, AC = 24$

.83 במשולש ישר זווית ניצב אחד באורך 8 ס"מ וסינוס הזווית שממול 0.8. מצאו את אורך היתר והניצב השני.

.84 במשולש ישר זווית היתר a ואחת מהזוויות החדות α. רשמו באמצעות פונקציות טריגונומטריות של α את הביטויים לזווית השנייה ולניצבים.

.85 במשולש ישר זווית הניצב a והזווית שמולו α.

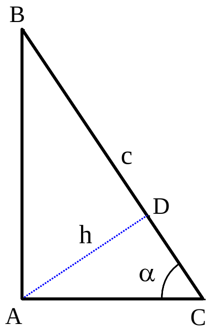
רשמו באמצעות פונקציות טריגונומטריות של α את הביטויים לזווית השנייה, לניצב שמולה וליתר.



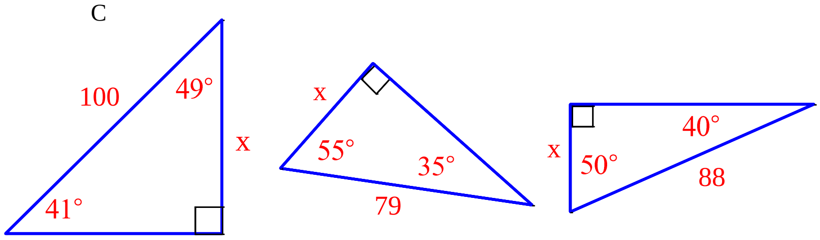
.86 במשולש ישר זווית נתונים היתר BC = c והזווית החדה α.

מִצאו את הניצבים AB ו- AC, את הגובה AD על היתר ואת הקטעים BD ו- DC.

רמז. המשולשים ABD ו- ADC גם הם ישרי זווית.

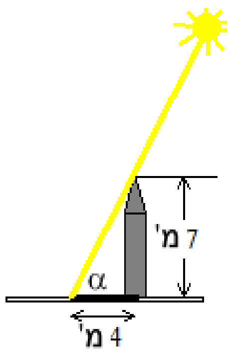


.87 רשמו שני ביטויים שונים למציאת x באמצעות פונקציות טריגונומטריות:



.88 אורך הצל שאותו מטיל עמוד אנכי בגובה 7 מ' הוא 4 מ'.

מה גובה השמש במעלות מעל האופק?



הדרכה לגובה השמש מעל האופק חשיבות רבה בחיי היום-יום: הוא קובע את משך הזמן המותר לשיזוף על חוף הים, את יעילות יצירת החשמל בקולטי שמש, את משך זמן החשיפה בצילום ועוד. אפשר למדוד את גובה השמש באמצעות מכשירים אופטיים מיוחדים, אולם אפשר לעשות זאת גם באמצעים פשוטים יותר, כפי שמתואר באיור: פשוט למדוד את אורך הצל שמטיל עמוד או עץ. הזווית בין קרן השמש העוברת דרך קצה העמוד לבין מישור הקרקע היא הזווית המבוקשת.

89. במשולש ישר זווית אחד הניצבים b, והזווית שמולו β.

א) בַּטאו את הניצב השני, את הזווית שמולו ואת היתר באמצעות b ו- β;

ב) מצאו את כל הצלעות ואת כל הזוויות של המשולש, אם נתון:

$b = 10$ ס״מ, $\beta = 50°$.

90. במשולש ישר זווית אחד הניצבים b, והזווית הסמוכה לו α.

א) בטאו את הניצב השני, את הזווית הסמוכה לו ואת היתר באמצעות b ו- α;

ב) מצאו את כל הצלעות ואת כל הזוויות של המשולש אם נתון:

$b = 12$ ס״מ, $\alpha = 42°$.

91. במשולש ישר זווית היתר c ואחת הזוויות החדות α.

בטאו באמצעות c ו- α את הזווית החדה השנייה ואת הניצבים, ומצאו את ערכיהם,

אם נתון: $c = 24$ ס״מ, $\alpha = 35°$.

92. הניצבים במשולש ישר זווית הם ל- a ו- b. בטאו באמצעותם את היתר ואת ערכי הטנגנס של הזוויות החדות, ומצאו את ערכיהם עבור $b = 15$ מ׳, $a = 12$ מ׳.

93. יחס הניצבים במשולש ישר זווית הוא 19:28. מצאו את זוויות המשולש.

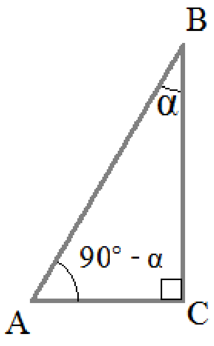
הדרכה: השתמשו בהגדרת הטנגנס.

3.2 ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס של זוויות מיוחדות

משפט **עבור כל זווית חדה α מתקיים:**

$$\mathbf{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$$

הוכחה סכום זוויות חדות במשולש ישר זווית הוא $90°$, לכן אם זווית אחת היא α,



אזי הזווית השנייה היא $(90° - \alpha)$. על פי ההגדרה:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{AB}, \cos\alpha = \frac{BC}{AB};$$

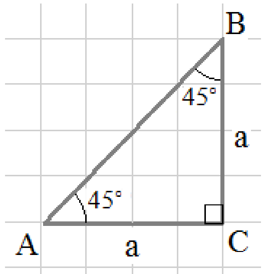
$$\sin(90° - \alpha) = \frac{BC}{AB}, \ \cos(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB}$$

מהשוויון השני והשלישי מקבלים: $\underline{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha}$,

ומהראשון והרביעי מקבלים: $\underline{\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha}$. **מ.ש.ל.**

כיוון שהנוסחאות (1) – (3) מאפשרות לחשב סינוס, קוסינוס וטנגנס של כל זווית α בתחום $0 < \alpha < 90°$, אפשר לומר שסינוס, קוסינוס וטנגנס הם פונקציות של הזווית α. פונקציות אלה נקראות **פונקציות טריגונומטריות**.

ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס של זווית 45°



נשרטט משולש ישר זווית בעל זווית חדה 45°:

גם הזווית החדה השנייה 45°, לכן המשולש שווה שוקיים.

נסמן את אורך הניצבים ב- a. על פי משפט פיתגורס:

$$AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{2}\cdot a$$

נציב בנוסחת הסינוס:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

כדי "להיפטר" משורש במכנה השבר, נכפיל מונה ומכנה ב- $\sqrt{2}$:

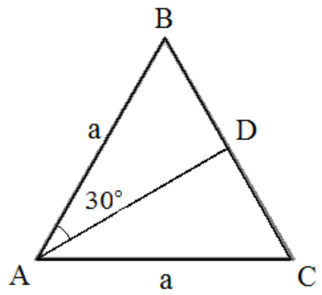
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

לבסוף נקבל: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

באופן דומה נחשב קוסינוס: $\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

נציב את ערכי הניצבים בנוסחה לטנגנס: $\tan 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1$

ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס של הזווית 30°



נשרטט משולש שווה צלעות ABC, ונעביר בו תיכון AD.

על פי תכונות משולש שווה צלעות התיכון הוא גם חוצה זווית וגם גובה.

<u>המשולש ABD הוא ישר זווית</u>, שהזווית החדה בו 30°.

נסמן את צלע המשולש ABC ב- a. אזי: $BD = \frac{a}{2}$.

נשתמש במשפט פיתגורס: $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

נציב בנוסחאות של סינוס, קוסינוס וטנגנס:

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס של זווית $60°$

כיוון ש- $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$, אפשר לרשום:

$$\sin 60° = \cos (90° - 60°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}$$

שימו לב: קיבלנו את הערכים ללא שימוש במחשבון, אלא ברישום אלגברי (באמצעות שורש ריבועי). קל לזכור רישום מעין זה **והוא אף מדויק** בהשוואה לרישום במספרים עשרוניים באמצעות המחשבון.

לדוגמה, אם ננסה לחשב את $\sin 60°$ במחשבון, נקבל: $\frac{\sqrt{3}}{2}$=0.866025......

מכיוון שהמספר $\frac{\sqrt{3}}{2}$ הוא אי-רציונלי, ברישום העשרוני שלו יש אינסוף ספרות, המחשבון מעגל את המספר עד לדיוק מסוים, ומציג את המספר המקורב.

כאשר מבצעים פעולות נוספות במספרים המקורבים, שגיאת החישוב גְדֵלה.

לכן בפתרון בעיות עדיף להשתמש ברישום האלגברי ולהשתמש במחשבון רק בסוף.

3.3 תלות של ערכי סינוס, קוסינוס וטנגנס בגודל הזווית

במשולש ישר זווית ערך הזווית החדה α יכול להשתנות מ- 0 עד $90°$: $0 < \alpha < 90°$.

הערות

א. את הערך 0 מקובל לרשום ללא סימני יחידות (מעלות, מטרים, אחוזים וכדי) ;

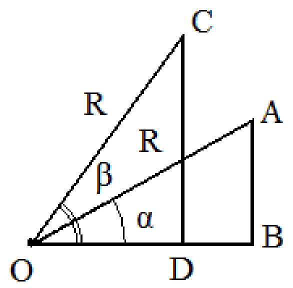
ב. כאשר $\alpha = 0$ או $\alpha = 90°$ המשולש הופך לקטע של ישר.

מקרים מעין אלה נלמד בהמשך.

משפט

כאשר זווית חדה α גְדֵלָה, גְדֵלִים גם הערכים של $\sin\alpha$ ו- $\tan\alpha$, ואילו ערכו של $\cos\alpha$ קָטֵן.

הוכחה



נתבונן בשרטוט : המשולשים OAB ו- OCD ישרי הזווית בעלי יתר שווה : $OA = R, OC = R$ וזוויות חדות שונות : $\beta > \alpha$. על פי הגדרת הסינוס :

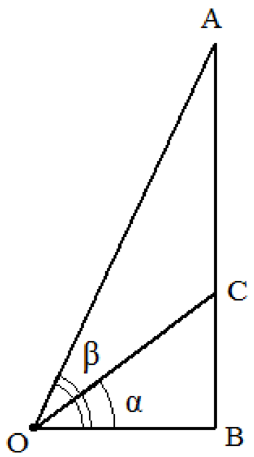
$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{R}, \sin\beta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{R}$$

כיוון ש- $AB < CD$ מקבלים : $\underline{\sin\beta > \sin\alpha}$ **מ.ש.ל.**

באופן דומה נקבל עבור קוסינוס :

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{R}, \quad \cos\beta = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{R}$$

כיוון ש- $OB > OD$ מסיקים כי $\underline{\cos\beta < \cos\alpha}$ **מ.ש.ל.**



נתבונן בשרטוט המציג את ערכי הטנגנס של שתי זוויות שונות :

$$\tan\alpha = \frac{CB}{OB}, \quad \tan\beta = \frac{AB}{OB}$$

כיוון שניצב AB גדול מניצב CB $(AB > CB)$ וניצב OB משותף לשני המשולשים, מסיקים שערך הטנגנס של הזווית הגדולה יותר β גדול יותר :

$$\beta > \alpha \Rightarrow \underline{\tan\beta > \tan\alpha}$$ **מ.ש.ל.**

דוגמה מה גדול יותר: $\sin 40°$ או $\cos 40°$?

כיוון ש- $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ו- $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

מסיקים כי - $\cos 40° > \sin 40°$.

טבלת הערכים של $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ו- $\tan\alpha$ עבור

הזוויות של $30°$, $45°$, $60°$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

את הערכים עבור זוויות α אחרות אפשר לחשב באמצעות מחשבון.

הערות

א. מומלץ לזכור את הטבלה.

ב. מומלץ להשתמש במחשבון רק בחישובים שבהם מופיעות זוויות שאינן מיוחדות.
בחישובים שבהם מופיעות זוויות מיוחדות עדיף להשתמש בערכים הרשומים בטבלה ברישום האלגברי.
במקרים רבים השורשים שבשברים יצטמצמו ויהפכו לשברים פשוטים.

תרגילים

109. קבעו איזו זווית, α או β גדולה יותר, אם ידוע כי:

א) $\sin\alpha = \frac{1}{3},\ \sin\beta = \frac{1}{4}$ ב) $\sin\alpha = \frac{2}{3},\ \sin\beta = \frac{3}{4}$

ג) $\cos\alpha = \frac{3}{7},\ \cos\beta = \frac{2}{5}$ ד) $\cos\alpha = 0.75,\ \cos\beta = 0.74$

ה) $\tan\alpha = 2.1,\ \tan\beta = 2.5$ ו) $\tan\alpha = \frac{8}{3},\ \tan\beta = \frac{5}{2}$?

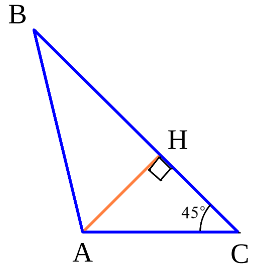
110. במשולש ישר זווית ABC זווית A גדולה מזווית B. איזה ניצב גדול יותר: AC או BC?

111. במשולש ישר זווית ABC הניצב BC גדול מהניצב AC.

איזו זווית גדולה יותר: A או B?

112. במשולש ישר זווית היתר a והזווית החדה $60°$.

מצאו את אורך הניצב שמול זווית זו.



113. אחת מזוויות משולש $45°$. הגובה AH לצלע הסמוכה לה מחלק

אותה לקטעים באורך 20 ו- 21 ס״מ.

מצאו את הצלע הגדולה AB.

114. אורך אחת הצלעות במשולש הוא 1 מ׳, והזוויות הסמוכות לה

הן $30°$ ו- $45°$. מצאו את הצלעות האחרות של המשולש.

115. בדקו, אם השוויון אפשרי:

א) $\cos\alpha = 2\cdot\sin 20°$ ב) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\tan 80°$

ג) $\sin\alpha = \tan 20°$ ד) $\cos\alpha = 3\cdot\tan 20°$

116. מה גדול יותר:

א) $\sin 58°$ או $\cos 58°$ ב) $\sin 18°$ או $\cos 18°$

ג) $\sin 81°$ או $\tan 81°$ ד) $\sin 20°$ או $\cos 20°$?

3.4 זהויות טריגונומטריות בסיסיות

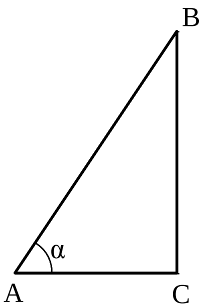
זהות היא שוויון שמתקיים עבור כל ערכי המשתנים (להבדיל ממשוואה, שהיא מתקיימת עבור ערכים מסוימים של המשתנים).

זהות טריגונומטרית אחת כבר למדתם:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

נוכיח זהויות בסיסיות נוספות שתעזורנה בפתרון בעיות:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (2)$$



הוכחה

נתבונן במשולש ישר זווית ABC שבו אחת מהזוויות החדות היא α.

על פי משפט פיתגורס מתקיים: $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

נחלק את שני האגפים ב- AB^2:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$$

לפי ההגדרות של סינוס וקוסינוס מתקיים:

$$\frac{BC}{AB} = \sin\alpha, \quad \frac{AC}{AB} = \cos\alpha$$

לכן:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

שוויון זה מתקיים עבור כל זווית חדה α, לכן הוא זהות.

זהויות אלה חשובות משום שהן מאפשרות למצוא שניים מבין שלושת הערכים $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ או $\tan\alpha$, כאשר הערך השלישי ידוע.

דוגמה נתון: $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. מְצאו את $\sin\alpha$ ו- $\tan\alpha$.

◀ כיוון ש- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ מקבלים:

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \qquad (3)$$

גם ביטוי זה הוא זהות, ואפשר לצרף אותו לזהויות הבסיסיות.

בדומה לכך נקבל זהות נוספת:

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \qquad (4)$$

מציבים נתונים ומקבלים:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5} \qquad \triangleright$$

תרגילים

.117 מְצאו:

א) $\sin\alpha$ ו- $\tan\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

ב) $\sin\alpha$ ו- $\tan\alpha$, אם נתון: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

ג) $\cos\alpha$ ו- $\tan\alpha$, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ד) cos α ו- tan α, אם נתון: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$

.118 ג) sin α ו- cos α, אם נתון: $\tan\alpha = 1$

ג) sin α ו- cos α, אם נתון: $\tan\alpha = \sqrt{3}$

ג) sin α ו- cos α, אם נתון: $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

הדרכה היעזרו בטבלה בעמ' 215 ומצאו את הזווית המתאימות.

.119 פשטו את הביטוי:

א) $1 - \sin^2\alpha$ ב) $1 - \cos^2\alpha$

ג) $\sin^2\beta - 1$ ד) $\sin^2 A + \cos^2 A + 1$

.120 האם השוויונות יכולים להתקיים בו זמנית:

א) $\sin\alpha = 0.4$ ו- $\cos\alpha = 0.87$ ב) $\tan\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{7},\ \cos\alpha = \frac{7}{11},\ \sin\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{11}$?

הגדרה **קוטנגנס** הזווית הוא ערך **ההפוך לטנגנס**: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

.121 הוכיחו כי:

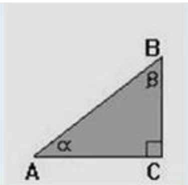
א. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ב. $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$ ג. $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$

הדרכה היעזרו בנוסחאות של סעיף 3.

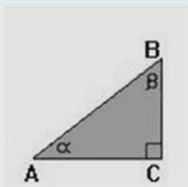
ד. $\cot 30° = \sqrt{3},\ \cot 45° = 1,\ \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

תרגילים אינטראקטיביים



תרגיל 1.1 במשולש ישר זווית ABC נתון: $AB = 8$, $\alpha = 28°$.

מצאו את הניצב BC והזווית β.

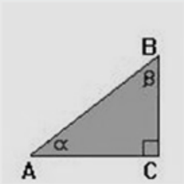


תרגיל 1.2 במשולש ישר זווית ABC נתון: $AC = 16$, $\alpha = 49°$.

מצאו את הניצב BC והיתר AB.

תרגיל 1.3 במשולש ישר זוית ABC נתון: $AB=24$, $BC=16$.

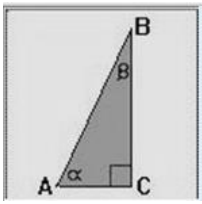
מצאו את הניצב AC והזוית α.



תרגיל 1.4 במשולש ישר זוית ABC נתון:

ניצב $BC=4$, ניצב $AC=\frac{1}{5}\cdot BC$.

מצאו את היתר AB ואת הזוית α.

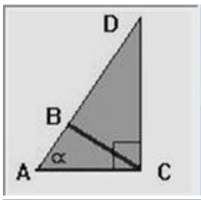


תרגיל 1.5 במשולש ישר זוית ADC, נתון:

ניצב $AC=18$, גובה ליתר $BC=13$.

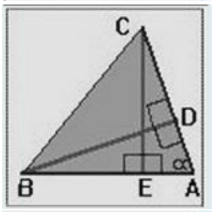
מצאו את היתר AD והניצב DC.

כל המידות - בס"מ.



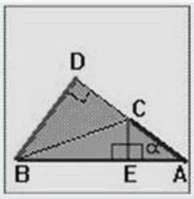
תרגיל 1.9 במשולש ABC נתון: $AC=3.2$, $AB=3.5$, $\alpha=71°$.

מצאו את הגבהים CE ו- BD.



תרגיל 1.10 במשולש ABC נתון: $AC=15$, $AB=16$, $\alpha=54°$.

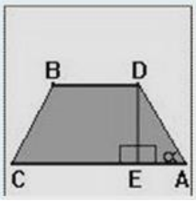
מצאו את הגבהים CE ו- BD.



תרגיל 1.11 בטרפז שווה שוקיים ADBC נתון:

$BD=12$, $AC=26$, $\alpha=68°$.

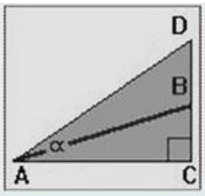
מצאו את הגובה DE והשוק AD.



תרגיל 1.12 במשולש ACD נתונים:

זויות $\alpha=32°$, $\measuredangle C=90°$, וחוצה זווית $AB=4$.

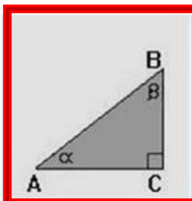
מצאו את שטח המשולש ABC.



שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)

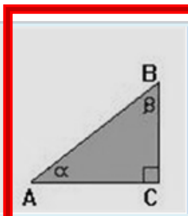
תרגיל 1.1 במשולש ישר זוית ABC נתון: $AB=8$, $\alpha=28°$.

מצא את הניצב BC והזוית β.



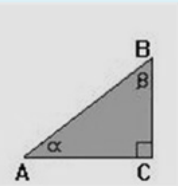
תרגיל 1.2 במשולש ישר זוית ABC נתון: $AC=16$, $\alpha=49°$.

מצא את הניצב BC והיתר AB.



תרגיל 1.3 במשולש ישר זוית ABC נתון: $BC=16$, $AB=24$.

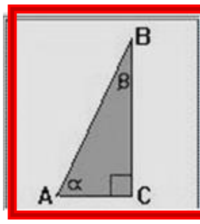
מצא את הניצב AC והזוית α.



תרגיל 1.4 במשולש ישר זוית ABC נתון:

ניצב $BC=4$, ניצב $AC=\frac{1}{5}\cdot BC$.

מצא את היתר AB ואת הזוית α.

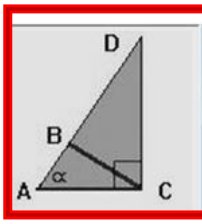


תרגיל 1.5 במשולש ישר זוית ADC, נתון:

ניצב $AC=18$, גובה ליתר $BC=13$.

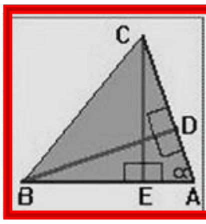
מצא את היתר AD והניצב DC.

כל המידות - בס"מ.



תרגיל 1.9 במשולש ABC נתון: $AC=3.2$, $AB=3.5$, $\alpha=71°$.

מצא את הגבהים CE ו- BD.



3.5 משפטי קוסינוסים וסינוסים

המשפטים הבאים מאפשרים לבטא צלעות המשולש באמצעות צלעות אחרות וזוויות ביניהן.

2.1 משפט קוסינוסים

ריבוע של צלע במשולש שווה לסכום ריבועי שתי צלעות אחרות פחות מכפלה כפולה של שתי הצלעות האלה בקוסינוס זווית ביניהן:

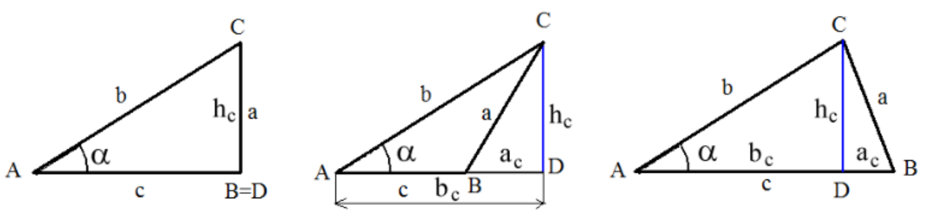
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \alpha}$$

הוכחה

זווית α במשולש ABC יכולה להיות חדה, כהה או ישרה. ננתח כל אחד מהמקרים.

א. זווית α חדה. היטל D של הקדקוד C על צלע AB יכול להימצא:

1. בין הקדקודים A ו- B (שרטוט 1);
2. בצד אחד עם הקדקוד B מהנקודה A (שרטוט 2);
3. נקודה D יכולה להתלכד עם הקדקוד B (שרטוט 3).



שרטוט 3 | שרטוט 2 | שרטוט 1

נסמן את היטלי הקטעים AC ו- BC על הצלע AB כ- b_c ו- a_c, ואת הגובה CD כ- h_c.

במקרים 1 ו- 2 עפ"י משפט פיתגורס נקבל:

$$a^2 = h_c^2 + a_c^2 \qquad (1)$$

$$h_c^2 = b^2 - b_c^2 \qquad (2)$$

שוויונות אלה מתקיימים גם במקרה 3 (אז: $a_c = 0, b_c = c$).

נבטא את a_c^2 באמצעות b_c ו- c. במקרה 1 (שרטוט 1) מתקיים: $a_c = c - b_c$; במקרה 2 (שרטוט 2): $a_c = b_c - c$, במקרה 3 (שרטוט 3): $a_c = 0$. בכל המקרים האלה מתקיים:

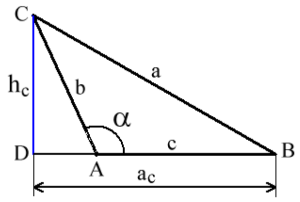
(3) $a^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2$

נציב את הביטויים ל- h_c^2 (2) ו- a_c^2 (3) בשוויון (1), ונקבל:

$$a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$$

אולם, $b_c = b\cdot\cos\alpha$. לכן מקבלים סופית:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\alpha$$



שרטוט 4

ב. זווית α כהה (שרטוט 4).

נעביר אנך CD לישר AB דרך הקדקוד B, ונתבונן במשולשים ישרי-זווית BCD ו- ACD. עפ״י משפט פיתגורס נקבל:

(4) $a^2 = h_c^2 + a_c^2$

(5) $h_c^2 = b^2 - b_c^2$

נבטא a^2 באמצעות b_c ו- c:

(6) $ac^2 = (b_c + c)^2 = b_c^2 + 2cb_c + c^2$

נציב את הביטוי ל- h_c^2 (5) ו- a_c^2 (6) בשוויון (4):

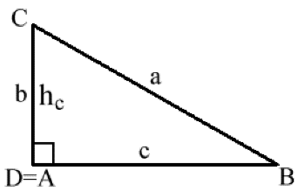
$$a^2 = h_c^2 + a_c^2 = (b^2 - b_c^2) + (b_c^2 + 2cb_c + c^2) =$$
$$= b^2 + 2cb_c + c^2.$$

עפ״י ההגדרה של קוסינוס רואים מהשרטוט 4 כי: $b_c = b*\cos(180° - \alpha)$,

ולפי הנוסחאות לפונקציות טריגונומטריות של זוויות גדולות:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

לכן גם במקרה זה מקבלים: $a^2 = b^2 + c^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\alpha$.



שרטוט 5

ג. זווית α ישרה (שרטוט 5).

במקרה זה $\cos\alpha = 0$, ועפ״י משפט פיתגורס מקבלים:

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\alpha$$

ובכן, הנוסחה

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\alpha$$

מאפשרת לחשב אורך של צלע אחת במשולש אם ידועים אורחי שתי צלעות אחרות וזווית מול הצלע הלא ידועה.

משפט קוסינוסים מאפשר לחשב גם זוויות של משולש עפ"י צלעותיו:

מהנוסחה (7) נובע:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

הערה

משפט קוסינוסים מהווה *הרחבה* של משפט פיתגורס: הרי במקרה של משולש ישר זווית מתקיים:

$$\alpha = 90° \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

משפט סינוסים

צלעות במשולש פרופורציונליות לסינוסים של זוויות נגדיות.

הוכחה

נתבונן במשולש ABC שבו הצלעות הן a, b ו- c, והזוויות הן α, β ו- γ.

עפ"י הנוסחאות לשטח משולש אפשר לרשום:

$$S = \frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$$

מכאן נובע:

$$bc\cdot\sin\alpha = ac\cdot\sin\beta$$
$$ac\cdot\sin\beta = ab\cdot\sin\gamma$$

כלומר:

$$b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta,\ \ c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma$$

כיוון שסינוסים של כל אחת מהזוויות אינם שווים לאפס, אפשר לרשום:

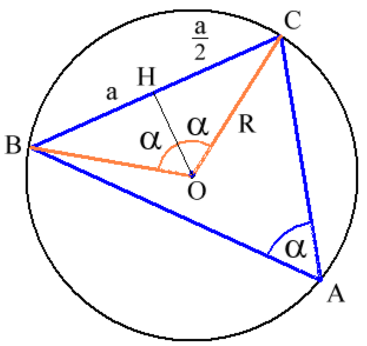
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},\ \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

לבסוף:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

משפט סינוסים מאפשר לחשב את הצלעות וזוויות המשולש עפ"י שתי צלעות וזווית ממול לאחת מהן או לפי צלע ושתי זוויות המשולש.

הוכחה אחרת של משפט סינוסים



שרטוט 7

נתבונן בשרטוט 7: המשולש ABC חסום במעגל בעל רדיוס R שמרכזו בנקודה O. זווית היקפית BAC נשענת על אותה קשת BC שעליה נשענת זווית מרכזית BOC, לכן היא שווה למחציתה:

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = \alpha$$

משולש BOC הוא שווה-שוקיים שבסיסו $BC = a$ ואורך השוק R. במשולש זה, OD הוא גובה וחוצה זווית O. לכן המשולש ODC הוא ישר-זווית, ועפ״י הגדרת סינוס זווית במשולש ישר זווית אפשר לרשום:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R},\ \frac{a}{2} = R\cdot\sin\alpha,\ a = 2R\cdot\sin\alpha = D\cdot\sin\alpha$$

כלומר, **צלע משולש שווה למכפלת קוטר מעגל חוסם בסינוס זווית מולה**:

$$a = D\cdot\sin\alpha,\ D = \frac{a}{\sin\alpha}$$

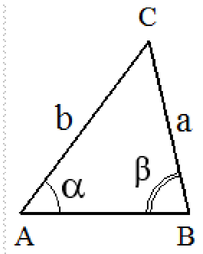
קשר כזה מתקיים עבור כל צלעות המשולש:

$$D = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

קיבלנו הוכחה נוספת למשפט סינוסים.

הקשר בין זוויות במשולש וצלעות ממול

משפט. במשולש, מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה,
ומול הצלע הגדולה נמצאת הזווית הגדולה.



הוכחה

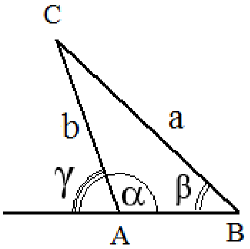
נסמן את שתי הצלעות במשולש ב- a ו- b, ואת הזוויות מולן ב- α ו- β. נוכיח כי אם $\beta > \alpha$, אזי $b > a$, ולהיפך: אם $b > a$,

אזי $\beta > \alpha$. ם α ו- β הן זוויות חדות, אזי לפי תכונות הסינוסים

יהיה: $\sin\beta > \sin\alpha$. על-פי משפט סינוסים אפשר לרשום:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

שוויון זה מתקיים רק אם $a > b$.



אם הזווית α כהה (שתי זוויות במשולש לא יכולות להיות כהות),

אזי הזווית $\gamma = 180° - \alpha$ חדה. כיוון שזווית γ היא זווית חיצונית

במשולש שאינה צמודה לזווית β, היא גדולה מ- β:

$\beta > 180° - \alpha$. לבסוף, עפ״י תכונת פונקציית סינוס של זוויות

גדולות מקבלים: $\sin(180° - \alpha) = \underline{\sin\alpha > \sin\beta}$ **מ.ש.ל.**

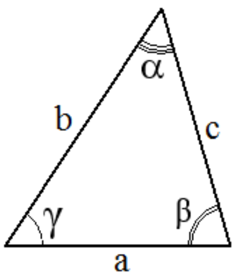
נוכיח **טענה הפוכה**: נתון כי $a > b$. צריך להוכיח כי $\alpha > \beta$.

נניח כי $\beta \leqslant \alpha$. אם $\alpha = \beta$, אזי המשולש שווה שוקיים, ו- $a = b$.

אם $\beta > \alpha$, אזי כמו שהוכחנו, $b > a$. בשני המקרים קיבלנו

סתירה, כיוון שלפי ההנחה $a > b$. לכן $\alpha > \beta$. **מ.ש.ל.**

פתרון משולשים



פתרון משולש משמעו מציאת צלעות וזוויות לא ידועות במשולש

עפ״י צלעות וזוויות ידועות. נסמן את צלעות המשולש באותיות a,

b ו- c, וזוויות מולן בהתאמה כ - α, β ו- γ.

דוגמה 1

במשולש נתון: (ס״מ) $a = 5$, שתי זוויות $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$.

מצאו את הזווית שלישית ושתי צלעות אחרות.

פתרון

כיוון שסכום זוויות במשולש שווה ל- $180°$, הזווית השלישית שווה ל-

$$\alpha = 180° - 30° - 45° = 105°$$

שתי הצלעות הנותרות נמצא באמצעות משפט סינוסים:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \; b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 5\cdot\frac{0.5}{0.966} \approx 2.59$$

$$c = a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 5\cdot\frac{0.707}{0.966} \approx 3.66$$

דוגמה 2

במשולש נתונות שתי צלעות: $a = 12$ (ס"מ), $b = 8$ (ס"מ) והזווית ביניהן: $\gamma = 60^\circ$.

מצאו את הצלע שלישית ושתי הזוויות האחרות.

פתרון

את הצלע נמצא לפי משפט קוסינוסים:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma} =$$
$$= \sqrt{144 + 64 - 2\cdot12\cdot8\cdot0.5} = \sqrt{112} \approx 10.6$$

כעת, בהינתן שלש צלעות המשולש, נמצא עפ"י משפט קוסינוסים את שתי הזוויות הנותרות:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0.189, \; \alpha \approx 79^\circ,$$
$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 41^\circ$$

דוגמה 3

במשולש נתונות שתי צלעות: $a = 6$ (ס"מ), $b = 8$ (ס"מ) וזווית מול הצלע a: $\alpha = 30^\circ$. מצאו את הצלע ואת הזוויות האחרות.

פתרון

עפ"י משפט סינוסים מוצאים את $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{8}{6}\cdot\sin 30^\circ \approx 0.667$$

לערך זה של סינוס מתאימות שתי זוויות: $\beta_1 \approx 42^\circ$ ו- $\beta_2 \approx 138^\circ$.

עבור הזווית הראשונה נמצא את הזווית השלישית:

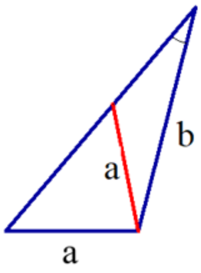
$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 108^\circ$$

ובאמצעות משפט סינוסים – את הצלע השלישית:

$$c_1 = \frac{a\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = 6\cdot\frac{\sin 180^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6\cdot\frac{\sin 108^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6\cdot\frac{0.951}{0.5} \approx 11.4$$

בדומה לכך, עבור הזווית $\beta_2 \approx 138°$ נמצא: $\gamma_2 \approx 12°$ ו- $c_2 \approx 2.49$.

הערה



להבדיל מהדוגמאות הקודמות, לדוגמה זו יש שני פתרונות (ראו שרטוט). עבור נתונים אחרים, לדוגמה, עבור $\alpha \geq 90°$ לבעיה זו קיים רק פתרון אחד, או אין פתרונות בכלל.

דוגמה 4

במשולש נתונות שלש צלעות: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

מצאו את זוויות המשולש.

פתרון

את הזוויות נמצא באמצעות משפט קוסינוסים:

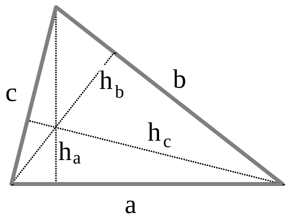
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} \approx 0.875,\ \alpha \approx 29°$$

באופן דומה מוצאים את שתי הזוויות הנותרות:

$$\cos\beta \approx 0.688,\ \beta \approx 47°$$

$$\gamma = 180° - 47° - 29° = 104°$$

3.6 שטח משולש

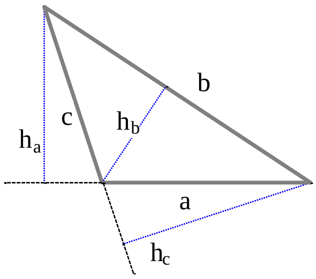


הנוסחאות המוכרות לשטח משולש באמצעות צלע וגובה לצלע זו:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

מאפשרות למצוא את צלע המשולש כאשר שטח המשולש וגובהו לצלע זו ידועים:

$$a = \frac{2S_\Delta}{h_a},\ b = \frac{2S_\Delta}{h_b},\ c = \frac{2S_\Delta}{h_c}$$

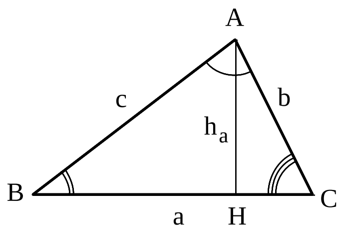


אפשר לפתח **נוסחה אחרת לחישוב שטח משולש אם ידועים אורך שתי צלעות וזווית ביניהן.**

נתבונן במשולש חד זווית ABC, ונמצא את הגובה h_a.

המשולש AHC הוא ישר זווית, ובו $h_a = AH$ ניצב מול

הזווית $\angle ACH = \angle C$.



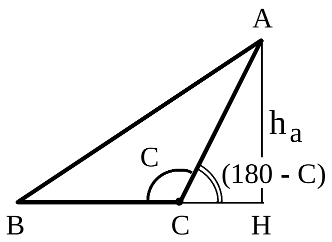
על פי הנוסחה המוכרת לשטח משולש :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

על פי הגדרת הסינוס : $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{h_a}{b}$, לכן $h_a = b \cdot \sin C$.

נציב בנוסחת השטח :

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\sphericalangle C} \qquad (6)$$

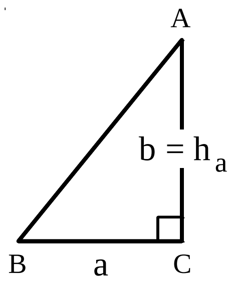


אם המשולש ACB הוא כהה זווית, הגובה h_a הוא ניצב מול הזווית $(180° - C)$ במשולש ישר זווית AHC.

עפ״י הנוסחה לסינוס זווית גדולה נקבל :

$$h_a = AC \cdot \sin(180° - C) = AC \cdot \sin C = b \cdot \sin C$$

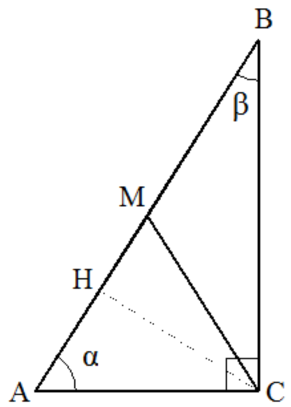
כלומר, שטח המשולש כהה זווית מתבטא באותה הנוסחה כמו לשטח משולש חד זווית.



אם המשולש הוא ישר זווית, <u>כל ניצב הוא גם גובה לניצב אחר</u>, לכן אפשר לרשום :

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot 1 = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin 90°$$

כלומר : **שטח של כל משולש שווה לחצי המכפלה של שתי צלעותיו בסינוס הזווית שביניהן.**



דוגמה במשולש ישר הזווית ABC נתון :

CM – תיכון ליתר $(AM = MB)$, הזווית $\beta = 32°$,

שטח המשולש MBC הוא 20 סמ״ר.

מצאו את כל צלעותיו ואת כל זוויותיו של המשולש.

א. נחשב את הזווית α : $\underline{\alpha} = 90° - \beta = 90° - 32° = \underline{58°}$.

ב. כיוון ש- $AM = MB$, ולשני המשולשים ACM ו- MBC גובה CH משותף, מסיקים שהשטח שלהם שווה: $S_{\Delta ACM} = S_{\Delta MBC}$, ושטח המשולש ABC הוא 40 סמ"ר:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 40 \text{ סמ"ר}$$

ג. נסמן את אחד הניצבים ב- a: $BC = a$. על פי הגדרת הטנגנס:

$$\frac{AC}{BC} = \tan\beta, \;\; AC = BC \cdot \tan\beta = a \cdot \tan\beta$$

נציב בנוסחת השטח:

$$\frac{1}{2} a \cdot \tan\beta \cdot a = 40 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} a^2 \cdot \tan\beta = 40 \;\Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{80}{\tan\beta} = \frac{80}{0.62} = 129.03$$

נחשב את הניצב BC: $BC = a = \sqrt{129.03} = 11.36$ ס"מ

ואת הניצב השני: $AC = BC \cdot \tan\beta = 11.36 \cdot \tan(32°) = 7.1$ ס"מ

<u>המשולש פתור</u>. ▷

נוסחה נוספת לחישוב שטח משולש – נוסחת הֶרוֹן

בנוסף לשתי נוסחאות לשטח משולש שלמדנו קודם:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

נוכיח עוד נוסחה שימושית אותה פיתח מתמטיקאי יווני הֶרוֹן במאה I לספירה:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

כאשר a, b ו- c הן צלעות המשולש ו- p הוא <u>חצי היקף</u> המשולש: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

הוכחה

עפ"י משפט קוסינוסים: $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

מהנוסחה לשטח משולש מוצאים את סינוס הזווית α: .

$$\sin\alpha = \frac{2S}{b \cdot c}$$

נציב את הביטויים לסינוס וקוסינוס בזהות הטריגונומטרית הבסיסית

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

ונקבל:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1$$

נחלץ מהביטוי את S^2:

$$S^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}$$

נשתמש בנוסחה להפרש ריבועים:

$$S^2=\frac{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}{16}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}=$$

$$=p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)$$

כלומר,

$$\boxed{S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$$

דוגמה

מצאו שטח המשולש שצלעותיו הן: $a=3,\ b=4,\ c=5$ (כל הערכים ב- ס"מ).

פתרון עפ"י נוסחת הרון מקבלים:

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6,\ p-3=3,\ p-4=2,\ p-5=1$$

$$S=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$$

תשובה: $S=6$ (סמ"ר).

הערה

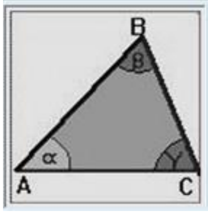
דרך אחרת לחישוב השטח היא להשתמש במשפט קוסינוסים כדי למצוא את אחת הזוויות במשולש, ולאחר מכן להשתמש בנוסחת שטח באמצעות סינוס של זווית או גובה לבסיס. בשני המקרים, הדרך תהיה ארוכה בהרבה לעומת השימוש בנוסח הרון.

תרגילים אינטראקטיביים

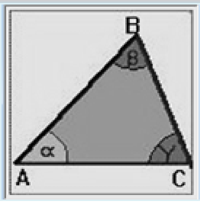
משפט סינוסים

תרגיל 2.1 במשולש ABC נתונים:
$\alpha=45^\circ,\ BC=11,\ AC=13$.

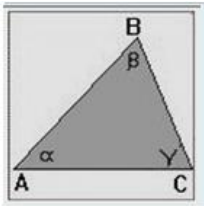
מצאו את הזוויות β ו- γ.



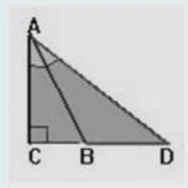
תרגיל 2.2 במשולש ABC נתון:
$\alpha=47^\circ$, $BC=9$, $AC=11$
מצאו את הצלע AB.



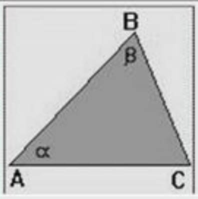
תרגיל 2.3 במשולש ABC נתונים:
$BC=14$, $\beta=62^\circ$, $\alpha=53^\circ$.
מצאו את הצלעות AB ו- AC.



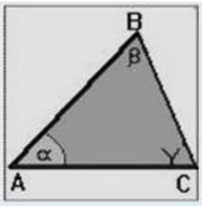
תרגיל 2.4 במשולש ישר זווית ACD נתונים:
$\sphericalangle CAD=48^\circ$, וחוצה זווית $AB=9$.
מצאו את AD ו- BD.



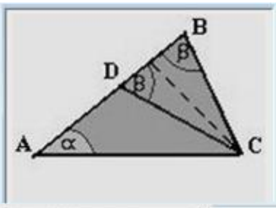
תרגיל 2.5 במשולש ABC נתונות הזוויות $\alpha=38^\circ$ ו- $\beta=56^\circ$.
מצאו את היחס $\frac{BC}{AC}$.



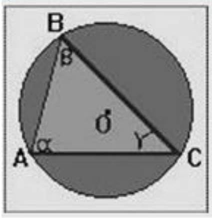
תרגיל 2.6 במשולש חד זווית ABC נתונים:
$\frac{BC}{AB}=0.9$, $AC=13$, $\alpha=47^\circ$.
מצאו את הצלע BC ואת הזוויות הנותרות.



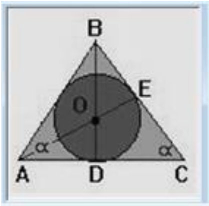
תרגיל 2.7 במשולש נתונים: זווית $\alpha=46^\circ$ והיחס $k=0.82$
בין הצלע ממול לצלע סמוכה.
מצאו את כל הזוויות.



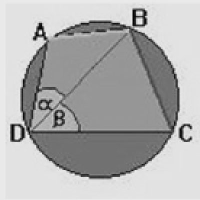
תרגיל 2.8 משולש חד זווית ABC חסום במעגל.
נתונים: $AC=7.6, BC=8.2$ ורדיוס המעגל: $R=5$.
מצאו את הצלע AB ואת כל זוויות המשולש.



תרגיל 2.9 במשולש שווה שוקיים ABC חסום מעגל (AB=BC).
נתון כי זווית הבסיס במשולש $\alpha=70^\circ$,
ורדיוס המעגל הוא: $OD=5.6$.
מצא את הקטע AE.



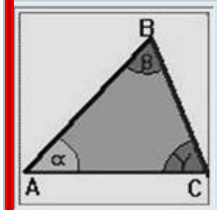
תרגיל 2.10 מרובע ABCD חסום במעגל. נתונים:
$AB=9$, $\alpha=21^\circ$, $\beta=39^\circ$
מצא את הצלע BC.



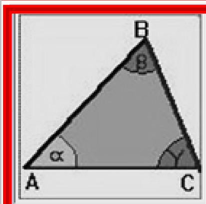
שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)

משפט סינוסים

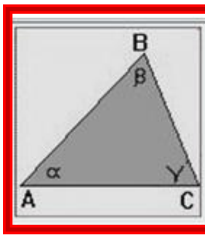
תרגיל 2.1 במשולש ABC נתונים:
$\alpha=45^\circ$, $BC=11$, $AC=13$.
מצא את הזוויות β ו- γ.



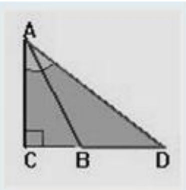
תרגיל 2.2 במשולש ABC נתון:
$\alpha=47^\circ$, $BC=9$, $AC=11$
מצא את הצלע AB.



תרגיל 2.3 במשולש ABC נתונים:
$BC=14$, $\beta=62^\circ$, $\alpha=53^\circ$.
מצא את הצלעות AB ו- AC.

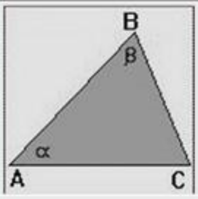


תרגיל 2.4 במשולש ישר זווית ACD נתונים:
$\measuredangle CAD=48^\circ$, וחוצה זווית $AB=9$.
מצא את AD ו- BD.



תרגיל 2.5 במשולש ABC נתונות הזוויות $\alpha=38^\circ$ ו- $\beta=56^\circ$.

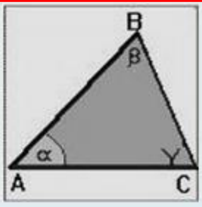
מצאת את היחס $\frac{BC}{AC}$.



תרגיל 2.6 במשולש חד זווית ABC נתונים:

$\alpha=47^\circ$, $AC=13$, $\frac{BC}{AB}=0.9$.

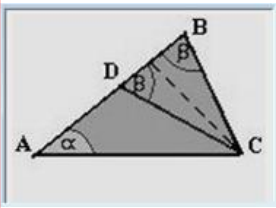
מצאו את הצלע BC ואת הזוויות הנותרות.



תרגיל 2.7 במשולש נתונים: זווית $\alpha=46^\circ$ והיחס $k=0.82$

בין הצלע ממול לצלע סמוכה.

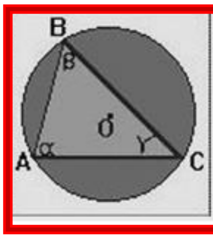
מצאו את כל הזוויות.



תרגיל 2.8 משולש חד זווית ABC חסום במעגל.

נתונים: $AC=7.6, BC=8.2$ ורדיוס המעגל: $R=5$.

מצאו את הצלע AB ואת כל זוויות המשולש.

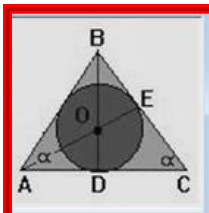


תרגיל 2.9 במשולש שווה שוקיים ABC חסום מעגל (AB=BC).

נתון כי זווית הבסיס במשולש $\alpha=70^\circ$,

ורדיוס המעגל הוא: $OD=5.6$.

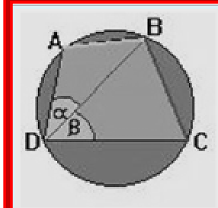
מצאו את הקטע AE.



תרגיל 2.10 מרובע ABCD חסום במעגל. נתונים:

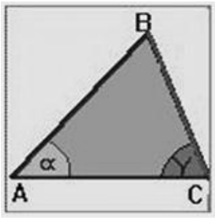
$AB=9$, $\alpha=21^\circ$, $\beta=39^\circ$

מצאו את הצלע BC.

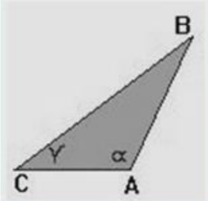


תרגילים אינטראקטיביים

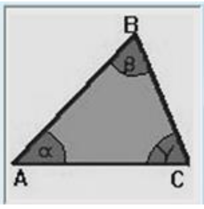
משפט קוסינוסים



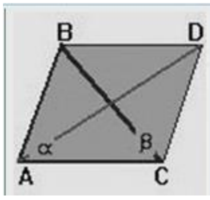
תרגיל 3.1 במשולש ABC נתון:
$\alpha=47°$, $AC=8$, $AB=10$.
מצאו את הצלע BC ואת הזווית γ.



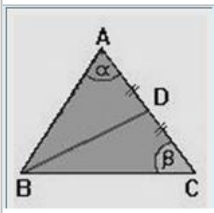
תרגיל 3.2 במשולש ABC נתון:
$\alpha=127°$, $AC=14$, $AB=8$.
מצאו את הצלע BC ואת הזווית γ.



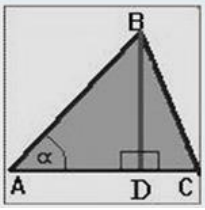
תרגיל 3.3 במשולש ABC נתון:
$AC=8.2$, $BC=7.3$, $AB=8$.
מצאו את כל זוויות המשולש.



תרגיל 3.4 במקבילית ABDC נתונים:
הצלעות: $AC=8.2$, $AB=7.7$ והאלכסון $BC=8.8$.
מצאו את האלכסון השני.

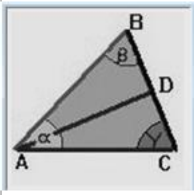


תרגיל 3.5 במשולש שווה שוקיים ABC נתון:
$\beta=65°$, $AB=AC=12$.
מצאו את התיכון BD.

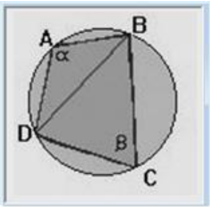


תרגיל 3.6 נתונות שלוש צלעות במשולש $\triangle ABC$:
$AC=9.9$, $BC=8.8$, $AB=9$.
מצאו את הגובה BD.

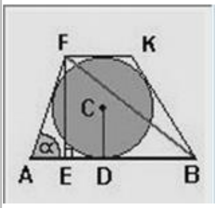
תרגיל 3.7 במשולש ABC נתונים:
צלע $AC=10$, זווית $\alpha=74^\circ$, וחוצה זווית $AD=9$.
מצאו זווית γ וצלע AB.



תרגיל 3.8 מרובע ABCD חסום במעגל. נתונים ארבע צלעותיו:
$AB=7.9, BC=8.4, CD=4.2, AD=9.6$
מצאו את הזווית α והאלכסון BD.



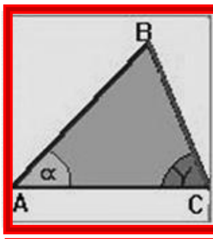
תרגיל 3.9 המעגל חסום בטרפז. נתונים:
בסיס הטרפז $AB=16$, זווית הבסיס $\alpha=80^\circ$
ורדיוס המעגל $r=CD=9$.
מצאו את האלכסון BF של הטרפז.



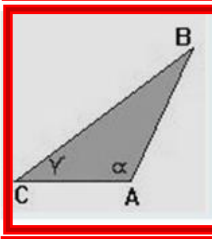
שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)

משפט קוסינוסים

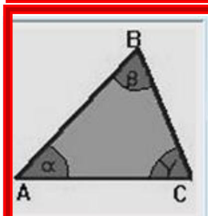
תרגיל 3.1 במשולש ABC נתון:
$\alpha=47^\circ$, $AC=8$, $AB=10$.
מצאו את הצלע BC ואת הזווית γ.



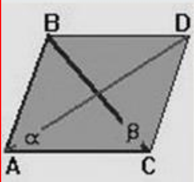
תרגיל 3.2 במשולש ABC נתון:
$\alpha=127^\circ$, $AC=14$, $AB=8$.
מצאו את הצלע BC ואת הזווית γ.



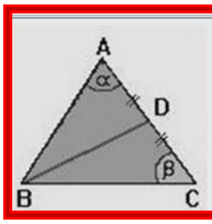
תרגיל 3.3 במשולש ABC נתון:
$AC=8.2$, $BC=7.3$, $AB=8$.
מצאו את כל זוויות המשולש.



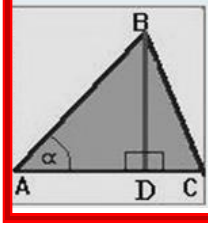
תרגיל 3.4 במקבילית ABDC נתונים:
הצלעות: $AB=7.7$, $AC=8.2$ והאלכסון $BC=8.8$.
מצא את האלכסון השני.



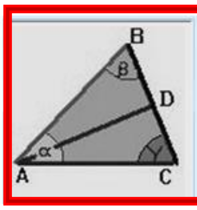
תרגיל 3.5 במשולש שווה שוקיים ABC נתון:
$AB=AC=12$, $\beta=65^\circ$.
מצא את התיכון BD.



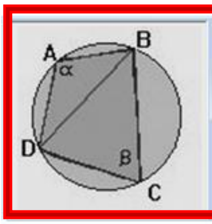
תרגיל 3.6 נתונות שלוש צלעות במשולש $\triangle ABC$:
$AB=9$, $BC=8.8$, $AC=9.9$.
מצא את הגובה BD.



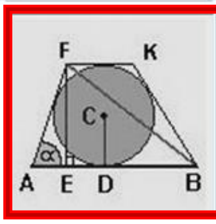
תרגיל 3.7 במשולש ABC נתונים:
צלע $AC=10$, זווית $\alpha=74^\circ$, וחוצה זווית $AD=9$.
מצא זווית γ וצלע AB.



תרגיל 3.8 מרובע ABCD חסום במעגל. נתונים ארבע צלעותיו:
$AB=7.9, BC=8.4, CD=4.2, AD=9.6$
מצא את הזווית α והאלכסון BD.



תרגיל 3.9 המעגל חסום בטרפז. נתונים:
בסיס הטרפז $AB=16$, זווית הבסיס $\alpha=80^\circ$
ורדיוס המעגל $r=CD=9$.
מצא את האלכסון BF של הטרפז.



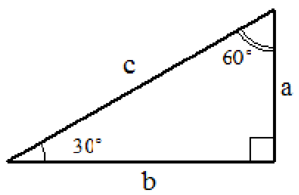
3.7 תכונות משולש ישר זווית

בין כל המשולשים ישרי הזווית יש כמה מיוחדים, שתכונותיהם מאפשרות לנו לפתור בעיות רבות ללא שימוש בנוסחאות טריגונומטריות.

3.7.1 משולש $30° - 60° - 90°$

משפט 1 **בכל משולש ישר זווית בעל זווית חדה $30°$, ניצב מול זווית זאת ("הניצב הקטן") שווה למחצית היתר.**

הוכחה

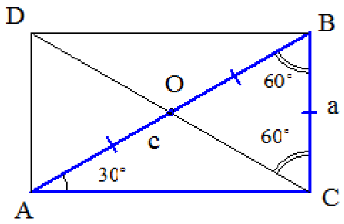


על פי ההגדרה של סינוס:

$$\frac{a}{c} = \sin 30°,\ a = c \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}c$$

מ.ש.ל.

דרך אחרת (גיאומטרית) להוכחה:



נשלים את המשולש למלבן.

המשולש OBC שווה צלעות כיוון ש-

$\angle B = \angle C = 60°$. לכן $BC = OB$.

על פי תכונת אלכסוני מלבן: $AO = OB$.

לכן: $a = BC = OB = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$, **מ.ש.ל.**

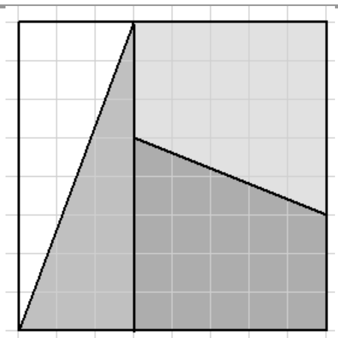
משפט 2 **בכל משולש ישר זווית בעל זווית חדה $30°$, ניצב שליד זווית זאת ("הניצב הגדול") שווה ליתר כפול ב- $\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

הוכחה $\frac{b}{c} = \cos 30°,\ b = c \cdot \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ **מ.ש.ל.**

משפט 3 **בכל משולש ישר זווית בעל זווית חדה $30°$, הניצב הארוך גדול מהניצב הקצר פי- $\sqrt{3}$.**

הוכחה על פי הגדרת הטנגנס: $\frac{b}{a} = \tan 60°,\ b = a \cdot \tan 60° = \sqrt{3}\ a$ **מ.ש.ל.**

לסקרנים



כדי להדגים את החידה דרושים:

נייר משבצות, סרגל, עיפרון ומספריים.

שרטטו מלבן 8×8 משבצות וגזרו אותו ל- 4 חלקים על-פי השרטוט.

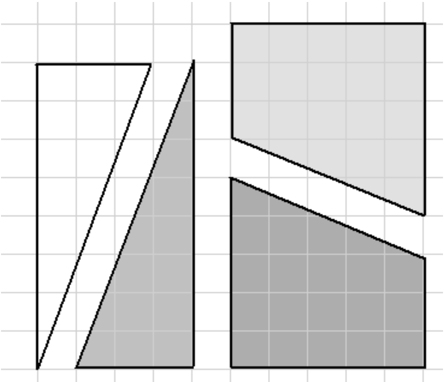
הרכיבו מחלקים אלה מלבן.

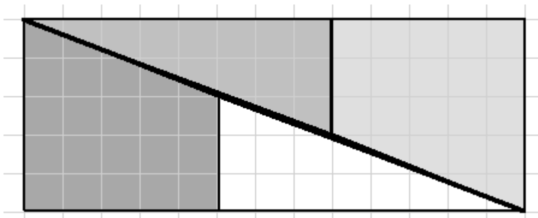
חַשבו את שטח הריבוע. **תשובה**: $8\times8 = 64$

חַשבו את שטח המלבן.

תשובה: אורך כפול רוחב, כלומר:

$$(8+5)\times5 = 13\times5 = 65$$





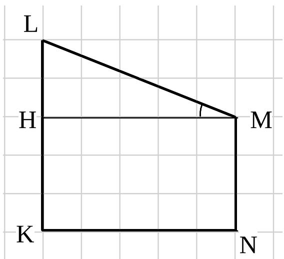
מאיפה צצה משבצת נוספת? כיצד ייתכן שלשתי צורות הבנויות מאותם חלקים יש שטחים שונים?

את פתרון החידה מספקת הטריגונומטריה:

נחשב את הזווית $\angle ABO$ במשולש ישר-זווית AOB (O – זווית ישרה). נשתמש בנוסחת הטנגנס:

$$\tan(\measuredangle ABO) = \frac{AO}{OB} = \frac{3}{8} = 0.375$$

נחשב באמצעות המחשבון את גודל הזווית: $\angle ABO = 20.55°$

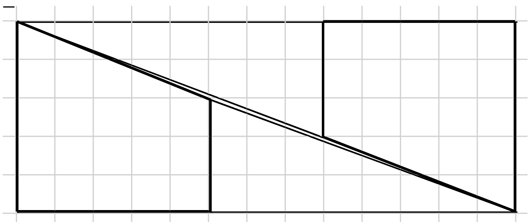


נתבונן בחלק הצמוד למשולש AOB משמאל.

כדי ששני החלקים הצמודים ירכיבו משולש במדויק, צריך ששיפוע השוק LM בטרפז KLMN, כלומר הזווית $\angle LMH$, יהיה שווה לשיפוע היתר AB, כלומר לזווית $\angle ABO$ במשולש.

נחשב את הזווית $\angle LMH$:

$$\tan(\sphericalangle LMH) = \frac{LH}{HM} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad , \ \angle LMH = 21.8°$$



ובכן, זווית השיפוע של השוק LM גדולה משיפוע היתר AB במשולש, ושני החלקים לא ירכיבו משולש מדויק. אם נשרטט את ההרכבה במדויק (בעיפרון דק), נוכל לראות זאת במו עינינו :

תרגיל

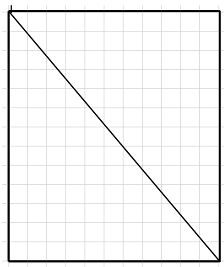
לסקרנים

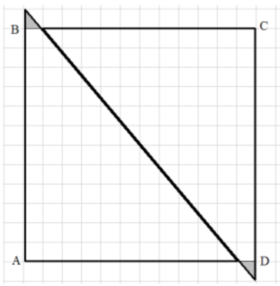
248. ניקח מלבן שגודלו 11×13 משבצות ונחתוך אותו באלכסון לשני משולשים. נזיז את המשולשים לאורך היתר המשותף למשבצת אחת. נוצר ריבוע ABCD, שצלעו שווה ל- 12 משבצות, ושני משולשים קטנים בפינות.

שטח המלבן המקורי שווה ל- $11 \times 13 = 143$ משבצות,

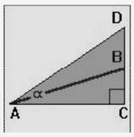
שטח הריבוע שווה ל- $12 \times 12 = 144$ משבצות, ושטח שני המשולשים הקטנים שווה למשבצת אחת. כלומר, שטח הצורה החדשה – 145 משבצות.

מאיפה הופיעו שתי משבצות נוספות?

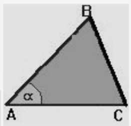




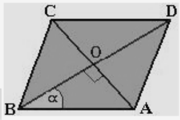
תרגילים אינטראקטיביים



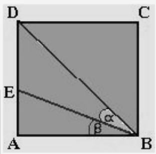
תרגיל 4.1 במשולש ACD נתונים: זוית $\alpha=32°$, $\measuredangle C=90°$
ו- AB חוצה זוית: $AB=6$
מצאו את שטח המשולש ABC .



תרגיל 4.2 במשולש ABC נתון: $\alpha=72°$, $AB=11$, $AC=13$
מצאו את שטח המשולש.

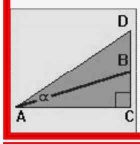


תרגיל 4.8 במעוין ABCD נתונים: $\alpha=43°$, $BD=14$.
מצאו את שטח המעוין.

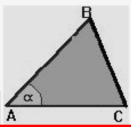


תרגיל 4.9 בריבוע ABCD נתונים: $\alpha=29°$, $BE=8$.
מצאו את שטח הריבוע.

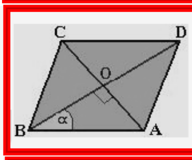
שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)



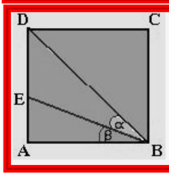
תרגיל 4.1 במשולש ACD נתונים: זוית $\alpha=32°$, $\measuredangle C=90°$
ו- AB חוצה זוית: $AB=6$
מצאו את שטח המשולש ABC .



תרגיל 4.2 במשולש ABC נתון: $\alpha=72°$, $AB=11$, $AC=13$
מצאו את שטח המשולש.



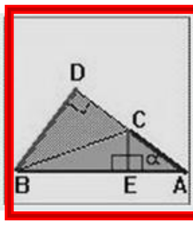
תרגיל 4.8 במעוין ABCD נתונים: $\alpha=43°$, $BD=14$.
מצאו את שטח המעוין.



תרגיל 4.9 בריבוע ABCD נתונים: $\alpha=29°$, $BE=8$.
מצאו את שטח הריבוע.

תרגיל 1.10 במשולש ABC נתון: $AC=15$, $AB=16$, $\alpha=54°$.

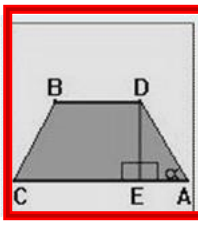
מצאו את הגבהים CE ו- BD.



תרגיל 1.11 בטרפז שווה שוקיים ADBC נתון:

$BD=12$, $AC=26$, $\alpha=68°$.

מצאו את הגובה DE והשוק AD.



תרגיל 1.12 במשולש ACD נתונים:

זויות $\alpha=32°$, $\sphericalangle C=90°$, וחוצה זווית $AB=4$.

מצאו את שטח המשולש ABC.